BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

NGUYỄN ĐĂNG ĐIỂM

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CƠ HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT TỚI PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN TÍNH CHẤT VẬT LIỆU

Ngành: CƠ KỸ THUẬT
Mã số: 9520101

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hà Nội - 2026

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

NGUYỄN ĐĂNG ĐIỀM

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CƠ HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT TỚI PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN TÍNH CHẤT VẬT LIỆU

Ngành: CƠ KỸ THUẬT
Mã số: 9520101

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hướng dẫn khoa học

1. PGS. TS. Tạ Duy Hiển

2. PGS. TS. Đào Sỹ Đán

Hà Nội - 2026

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của cá nhân tôi. Toàn bộ các kết quả nghiên cứu, phân tích và kết luận trình bày trong luận án đều trung thực và chưa từng được sử dụng để bảo vệ bất kỳ học vị nào trước đây.

Hà Nội, *ngày tháng năm*

Tác giả

Nguyễn Đăng Điềm

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới gia đình, những người luôn đồng hành, động viên, chia sẻ và hỗ trợ tinh thần cũng như vật chất trong suốt quá trình thực hiện nghiên cứu này.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS.TS. Tạ Duy Hiển và PGS.TS. Đào Sỹ Đán, những người thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo tôi trong suốt quá trình thực hiện nghiên cứu và hoàn thiện luận án.

Tôi xin cảm ơn Bộ môn Kết cấu, Bộ môn Sức bền vật liệu và Khoa Công trình, Trường Đại học Giao thông Vận tải đã tạo điều kiện và hỗ trợ nghiên cứu sinh trong quá trình học tập và nghiên cứu. Đồng thời xin gửi lời cảm ơn đến Bộ môn Kỹ thuật kết cấu, Khoa Công trình Phân hiệu tại TP Hồ Chí Minh tạo điều kiện thuận lợi để nghiên cứu sinh tham gia học tập và nghiên cứu.

Xin cảm ơn Phòng đào tạo sau đại học, Trường Đại học Giao thông vận tải đã tổ chức đào tạo chuyên nghiệp, tạo môi trường học tập, nghiên cứu thuận lợi để tôi có thể hoàn thành chương trình nghiên cứu sinh và luận án này.

Cuối cùng, tôi xin trân trọng cảm ơn các thành viên Hội đồng đánh giá luận án đã dành thời gian đọc, nhận xét và góp ý để giúp tôi hoàn chỉnh nội dung nghiên cứu một cách tốt nhất.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU 1

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI 1

2. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU 2

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU 3

4. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ Ý NGHĨA THỰC TIỄN CỦA LUẬN ÁN 3

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU 4

CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH NGẪU NHIÊN KẾT CẤU 5

1.1. BIẾN NGẪU NHIÊN 5

1.2. TRƯỜNG NGẪU NHIÊN 5

1.3. TỔNG QUAN CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN 8

1.3.1. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian 8

1.3.1.1. Nhóm các phương pháp biểu diễn điểm 8

1.3.1.2. Nhóm các phương pháp biểu diễn trung bình 9

1.3.1.3. Nhóm các phương pháp mở rộng chuỗi biểu diễn trường ngẫu nhiên 11

1.3.2. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian 16

1.3.2.1. Các phương pháp biến đổi tương quan 16

1.3.2.2. Các phương pháp dựa trên triển khai đa thức nhiễu động 17

1.4. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN 18

1.4.1. Phương pháp mô phỏng Monte Carlo 18

1.4.2. Phương pháp nhiễu loạn 20

1.4.3. Phương pháp tiếp cận phổ 21

1.5. TỔNG QUAN VỀ CÁC NGHIÊN CỨU CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG CỦA LUẬN ÁN 24

1.5.1. Tổng quan ứng dụng của phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên trong các lĩnh vực khoa học 25

1.5.2. Tình hình nghiên cứu ngoài nước 26

1.5.2.1. Tổng quan các nghiên cứu phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm 26

1.5.2.2. Tổng quan các nghiên cứu phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm 27

1.5.2.3. Tổng quan các nghiên cứu phân tích ngẫu nhiên dầm phân lớp chức năng (FGM) *28*

1.5.3. Tình hình nghiên cứu trong nước.....29

1.5.4. Đánh giá tổng quan và vấn đề nghiên cứu.....31

1.6. KẾT LUẬN CHƯƠNG I 32

CHƯƠNG II: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM PHẲNG CHỊU UỐN CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN 34

2.1. MÔ HÌNH BÀI TOÁN 34

2.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN BẰNG KỸ THUẬT TÍCH PHÂN TRỌNG SỐ BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN CỦA TÍNH CHẤT VẬT LIỆU 38

2.2.1. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều 38

2.2.2. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều 41

2.2.3. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều 44

2.2.4. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều.....45

2.3. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN TĨNH.....46

2.4. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH 52

2.4.1. Phân tích dao động uốn tự do của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn 52

2.4.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian 54

2.5. PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MÔ PHỎNG MONTE CARLO 62

2.5.1. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên hai chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ.....63

2.5.2. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên ba chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ.....65
2.5.3. Phân tích đáp ứng tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo.....66
2.5.4. Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo.....69
2.6. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN.....74
2.6.1. Đánh giá hiệu ứng thứ cấp và cơ sở áp dụng mô hình dầm phẳng cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.....74
2.6.1.1. Đối chứng đối với bài toán tĩnh.....76
2.6.1.2. Đối chứng đối với bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính.78
2.6.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên đáp ứng của dầm theo mật độ lưới chia phần tử.....79
2.6.3. Kiểm tra mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên.....81
2.6.4. Kiểm chứng mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố.....82
2.6.4.1. Kiểm chứng bài toán phân tích ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian.....82
2.6.4.2. Kiểm chứng bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian.....84
2.6.5. So sánh kết quả phân tích đáp ứng của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo.....85
2.7. KẾT LUẬN CHƯƠNG II.....89
CHƯƠNG III: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN.....91
3.1. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỘT CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN.....91

3.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH EULER.....93
3.3. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER NGẪU NHIÊN CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG MÔ PHỎNG MONTE CARLO.....100
3.4. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN 104
3.4.1. Đối sánh mô hình dầm phẳng và không gian trong phân tích ổn định ngẫu nhiên 104
3.4.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên lực tới hạn theo lưới chia phần tử 105
3.4.3. Kiểm tra mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên.....107
3.4.4. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố 109
3.4.5. So sánh kết quả phân tích ổn định Euler của cột bằng phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo 110
3.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG III 114
CHƯƠNG IV: KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC YẾU TỐ TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN ĐẶC TRƯNG THỐNG KÊ ĐÁP ỨNG CỦA DẦM, CỘT 116
4.1. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐÁP ỨNG TĨNH NGẪU NHIÊN CỦA DẦM CÓ MÔ ĐUN ĐÀN HỒI NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN.....116
4.1.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên 116
4.1.1.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều 116
4.1.1.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều 117
4.1.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên của chuyển vị 118
4.1.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của chuyển vị và hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian.....119

4.1.4. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều 120
4.2. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN 121
4.2.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến hệ số biến thiên giá trị riêng 121
4.2.1.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều 121
4.2.1.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều 123
4.2.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng 124
4.2.2.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều 124
4.2.2.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều 124
4.2.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của giá trị riêng và hệ số biến thiên của tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian 127
4.2.3.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều 127
4.2.3.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều 127
4.2.4. Phân tích ảnh hưởng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng 128
4.2.5. So sánh phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều 129
4.3. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN 132
4.3.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan của trường ngẫu nhiên đến hệ số biến thiên lực tới hạn 132
4.3.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên lực tới hạn 136
4.3.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên lực tới hạn và hệ số biến thiên mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian 137
4.3.4. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến hệ số biến thiên lực tới hạn .. 139
4.3.5. So sánh ổn định Euler của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều 140

4.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG IV 141
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 144
DANH MỤC CÁC CÔNG BỐ KHOA HỌC 147
TÀI LIỆU THAM KHẢO 148
PHỤ LỤC A: ẢNH HƯỞNG CỦA CHIỀU DÀI TƯƠNG QUAN ĐẾN COV ĐÁP ỨNG CỦA DẦM 160
PHỤ LỤC B: QUAN HỆ GIỮA COV TÍNH CHẤT VẬT LIỆU VÀ COV TRỊ RIÊNG DAO ĐỘNG CỦA DẦM 165
PHỤ LỤC C: ẢNH HƯỞNG ĐỘ LỆCH CHUẨN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN COV GIÁ TRỊ RIÊNG 167
PHỤ LỤC D: CHƯƠNG TRÌNH TÍNH 170

DANH MỤC HÌNH ẢNH

Hình 1.1. E và ρ của dầm FGM 28
Hình 2.1. Dầm có E ngẫu nhiên hai chiều 34
Hình 2.2. Dầm có E ngẫu nhiên ba chiều 35
Hình 2.3. Mô hình của phần tử kết cấu dầm 38
Hình 2.4. Các bước phân tích đáp ứng tĩnh ngẫu nhiên bằng SFEM 51
Hình 2.5. Mode dao động thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn 53
Hình 2.6. Sai số của tần số góc dao động riêng xác định bằng FEM và giải tích 54
Hình 2.7. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng SFEM 62
Hình 2.8. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $f(x,y)$ 64
Hình 2.9. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $g(x,y)$ 65
Hình 2.10. Sơ đồ tổng quát phân tích tĩnh ngẫu nhiên bằng MCS 69
Hình 2.11. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng MCS 74
Hình 2.12. Độ lệch chuẩn chuẩn hóa của các đặc trưng mặt cắt ngẫu nhiên 75
Hình 2.13. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của chuyển vị giữa nhịp, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử 80
Hình 2.14. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của giá trị riêng khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử 80
Hình 2.15. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của giá trị riêng khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử 81
Hình 2.16. COV của chuyển vị khi yếu tố ngẫu nhiên đầu vào có độ lệch nhỏ 81
Hình 2.17. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều 82
Hình 2.18. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều 82
Hình 2.19. So sánh COV của chuyển vị xác định bằng SFEM và MCS 86
Hình 2.20. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều xác định bằng SFEM và MCS 86
Hình 2.21. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS 86
Hình 2.22. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$) 87

Hình 2.23. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS 87
Hình 2.24. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS.....87
Hình 2.25. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$) 88
Hình 2.26. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma =0$, $COV_E = COV_\rho$) 88
Hình 2.27. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma =0$, $COV_E = COV_\rho$) 89
Hình 3.1. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng SFEM 100
Hình 3.2. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng MCS 103
Hình 3.3. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của lực tới hạn khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử 106
Hình 3.4. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của lực tới hạn khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử 107
Hình 3.5. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều.....108
Hình 3.6. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều.....108
Hình 3.7. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều 112
Hình 3.8. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều 112
Hình 3.9. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong các trường hợp COV_E của trường mô đun ngẫu nhiên hai chiều.....113
Hình 3.10. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong các trường hợp COV_E của trường mô đun ngẫu nhiên ba chiều.....114
Hình 4.1. Sơ đồ dầm giản đơn 116
Hình 4.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian hai chiều đến COV của chuyển vị.....117
Hình 4.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều đến COV của chuyển vị.....118

Hình 4.4. Ảnh hưởng của COV trường ngẫu nhiên *E* đến COV của chuyển vị.....119
Hình 4.5. Quan hệ giữa COV của chuyển vị và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên..119
Hình 4.6. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....120
Hình 4.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều.....121
Hình 4.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều.....122
Hình 4.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều (γ = -0,5) 122
Hình 4.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều (γ = 0).....122
Hình 4.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều (γ = 0,5).....123
Hình 4.12. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên).....125
Hình 4.13. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên) 125
Hình 4.14. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -1,0).....125
Hình 4.15. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -0,5).....126
Hình 4.16. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0) 126
Hình 4.17. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0,5) 126
Hình 4.18. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 1,0) 127
Hình 4.19. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng (σ_f = σ_g = 0,05) 128

Hình 4.20. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0{,}05$) 129
Hình 4.21. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có *E* ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều 131
Hình 4.22. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có ρ ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều 131
Hình 4.23. So sánh COV của trị riêng trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = 0$) 131
Hình 4.24. Sơ đồ tính cột chịu nén đúng tâm 132
Hình 4.25. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều 133
Hình 4.26. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$) 134
Hình 4.27. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$).....135
Hình 4.28. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$).....135
Hình 4.29. Ảnh hưởng của COV trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn.....136
Hình 4.30. Ảnh hưởng của COV trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều đến COV của lực tới hạn 137
Hình 4.31. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi 138
Hình 4.32. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi.....139
Hình 4.33. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều 140
Hình 4.34. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều 140
Hình 4.35. So sánh COV của lực tới hạn, *E* ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....141

Hình A.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$).....160
Hình A.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$).....160
Hình A.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$) 160
Hình A.4. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$) 161
Hình A.5. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$) 161
Hình A.6. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$).....161
Hình A.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, γ = -0,5).....162
Hình A.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, γ = -0,5).....162
Hình A.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, γ = -0,5) 162
Hình A.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, γ = 0).....163
Hình A.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, γ = 0).....163
Hình A.12. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, γ = 0).....163
Hình A.13. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, γ = 0,5).....164
Hình A.14. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, γ = 0,5).....164
Hình A.15. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, γ = 0,5).....164

Hình B.1. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi.....165
Hình B.2. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mật độ khối lượng.....165
Hình B.3. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu (γ = 0).....165
Hình B.4. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi.....166
Hình B.5. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mật độ khối lượng.....166
Hình B.6. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu (γ = 0).....166
Hình C.1. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên).....167
Hình C.2. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên).....167
Hình C.3. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -1,0).....167
Hình C.4. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -0,5).....168
Hình C.5. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0).....168
Hình C.6. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0,5).....168
Hình C.7. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 1,0).....169
Hình D.1. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán tĩnh.....170
Hình D.2. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính.....187
Hình D.3. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán ổn định.....204

DANH MỤC BẢNG, BIỂU

Bảng 2.1. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và dầm đối chứng ($d = 0{,}01L$) 77
Bảng 2.2. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và dầm đối chứng ($d = 0{,}1L$) 77
Bảng 2.3. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và dầm đối chứng ($d = L$) 78
Bảng 2.4. Sai khác tương đối về giá trị trung bình và COV của hai giá trị riêng uốn theo phương y.....79
Bảng 2.5. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác 83
Bảng 2.6. So sánh độ lệch chuẩn của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác 83
Bảng 2.7. So sánh COV của giá trị riêng thứ nhất bằng SFEM với công bố [63].....85
Bảng 3.1. So sánh đặc trưng thống kê của lực tới hạn theo mô hình dầm phẳng và dầm không gian.....105
Bảng 3.2. Kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa không thứ nguyên theo [136] 110
Bảng 3.3. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]...110
Bảng 3.4. So sánh COV của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136] 110

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Từ viết tắt	Tiếng Anh	Tiếng Việt
COV	Coefficient of Variation	Hệ số biến thiên
CDF	Cumulative Distribution Function	Hàm phân phối tích lũy
E	Young's Modulus	Mô đun đàn hồi
$\mathbb{E}$	Expected Value / Expectation	Kỳ vọng, giá trị kỳ vọng
FGM	Functionally Graded Material	Vật liệu cơ tính biến thiên
FEM	Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn
K-L	Karhunen–Loève Expansion	Khai triển Karhunen–Loève
MCS (MCs)	Monte Carlo Simulations	Mô phỏng Monte Carlo
PCE	Polynomial Chaos Expansion	Khai triển đa thức nhiễu động
PDF	Probability Density Function	Hàm mật độ xác suất
PFEM	Probabilistic Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn xác suất
SFEM	Stochastic Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên
SSFEM	Stochastic Spectral Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên tiếp cận phổ
SRM	Spectral Representation Method	Phương pháp biểu diễn phổ
Var	Variance	Phương sai
ρ	Mass Density	Mật độ khối lượng
1D	One-dimensional	Một chiều
2D	Two-dimensional	Hai chiều
3D	Three-dimensional	Ba chiều
1V	One-variable	Đơn biến

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Thông số	Thứ nguyên
x	Trục tọa độ dọc theo chiều dài	[Chiều dài]
y	Trục tọa độ dọc theo chiều cao mặt cắt ngang	[Chiều dài]
z	Trục tọa độ dọc theo bề rộng mặt cắt ngang	[Chiều dài]
t	Thời gian	s
h	Chiều cao của mặt cắt ngang hình chữ nhật	[Chiều dài]
b	Bề rộng của mặt cắt ngang hình chữ nhật	[Chiều dài]
L	Chiều dài nhịp tính toán	[Chiều dài]
A_e	Diện tích miền lấy tích phân	[Chiều dài]^2
V_e	Thể tích của phần tử	[Chiều dài]^3
d_x	Chiều dài tương quan không gian theo trục x	[Chiều dài]
d_y	Chiều dài tương quan không gian theo trục y	[Chiều dài]
d_z	Chiều dài tương quan không gian theo trục z	[Chiều dài]
σ_f	Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên f, bằng COV_E	-
σ_g	Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên g, bằng COV_ρ	-
γ	Hệ số tương quan chéo của các trường ngẫu nhiên	-
N_e	Số lượng phần tử	-
N	Số lượng hàm mô phỏng	-
E	Mô đun đàn hồi của vật liệu	MPa
ρ	Mật độ khối lượng của vật liệu	kg/m^3
R_{ff}	Hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi	-
R_{gg}	Hàm tự tương quan trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng	-
R_{fg}	Hàm tương quan chéo các trường ngẫu nhiên	-
S_{ff}	Hàm mật độ phổ công suất của trường mô đun đàn hồi	-
S_{gg}	Hàm mật độ phổ công suất của trường mật độ khối lượng	-

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong phân tích và thiết kế kết cấu, các thông số đầu vào có tính ngẫu nhiên và không chắc chắn xuất hiện phổ biến như: tải trọng và các tác động, tính chất vật liệu, kích thước hình học của kết cấu, hoặc những yếu tố liên quan đến việc thiếu dữ liệu khi phân tích. Trong đó, tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu thường bắt nguồn từ nhiều nguyên nhân như: quá trình chế tạo vật liệu, điều kiện thi công, môi trường, hoặc sự lão hóa của vật liệu. Các yếu tố này làm cho các thông số đầu vào như mô đun đàn hồi (E), hệ số Poisson (ν), mật độ khối lượng (ρ) trở thành những đại lượng không chắc chắn, biến đổi ngẫu nhiên trong không gian. Các giá trị trung bình của các đại lượng được đưa vào phân tích để thay thế cho các tham số ngẫu nhiên trong mô hình tất định có thể dẫn đến sự sai khác giữa kết quả mô phỏng và đáp ứng thực tế, làm giảm độ tin cậy và khả năng phản ánh đầy đủ bản chất vật lý của bài toán.

Trong bối cảnh đó, phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (Stochastic Finite Element Method – SFEM) đã và đang phát triển, được biết đến như một giải pháp hữu hiệu với mục đích mô phỏng và phân tích ảnh hưởng của các đại lượng không chắc chắn đến đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu. SFEM cho phép tích hợp trực tiếp các trường ngẫu nhiên không gian vào bài toán phân tích kết cấu, từ đó tính toán được các đại lượng thống kê của đáp ứng như kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên (COV) nhằm phục vụ cho các bài toán thiết kế theo độ tin cậy. Đặc biệt, với những tiến bộ gần đây của kỹ thuật máy tính và các kỹ thuật biểu diễn trường ngẫu nhiên như tích phân trọng số, khai triển Karhunen–Loève, biểu diễn phổ, và đa thức nhiễu động, việc triển khai SFEM ngày càng trở nên sâu rộng và hiệu quả hơn trong thực tiễn phân tích kết cấu.

Dầm và cột là những kết cấu cơ bản, phổ biến được áp dụng rộng trong các công trình xây dựng. Tuy nhiên, phần lớn các công trình khoa học đã công bố hiện nay khi phân tích đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột mới chỉ dừng lại ở việc xét đến sự biến thiên ngẫu nhiên của tính chất vật liệu theo một chiều (thường là chiều dài của cấu kiện), hoặc kết hợp giữa chiều dài và quy luật biến thiên tất định theo chiều cao tiết diện. Rất ít công trình công bố xem xét đến tính bất định của cơ tính vật liệu ngẫu nhiên đồng thời theo hai phương trong không gian 2D (chiều dài, chiều cao), hoặc theo cả ba phương trong không gian 3D (chiều dài, chiều cao, chiều rộng), trong khi mô hình như vậy lại phản ánh gần với thực tế hơn về tính thay đổi ngẫu nhiên của tính chất vật liệu trong quá trình triển khai thi công, khai thác của kết cấu.

Do đó, phân tích ngẫu nhiên bằng cách phát triển SFEM cho dầm, cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian (2D, 3D) là cần thiết. Hướng nghiên cứu này không những lấp đầy khoảng trống về mặt lý thuyết, mà còn cung cấp thêm tri thức về khả năng mô phỏng và dự báo chính xác đáp ứng thực của kết cấu. Bên cạnh đó, đây cũng là xu hướng phù hợp với yêu cầu ngày càng cao về độ tin cậy và an toàn trong thiết kế công trình, đồng thời góp phần vào mục tiêu tối ưu hóa vật liệu và chi phí, nâng cao hiệu quả khai thác và bảo trì công trình theo hướng chủ động và bền vững.

Căn cứ trên những nguồn được tổng hợp, có thể khẳng định rằng đề tài **"Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích ứng xử cơ học của dầm, cột xét tới phân bố ngẫu nhiên tính chất vật liệu"** là cấp thiết, có giá trị thực tiễn và đóng góp đáng kể thêm tri thức vào lĩnh vực cơ học ngẫu nhiên trong kỹ thuật kết cấu hiện đại.

2. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

Mục tiêu xuyên suốt của luận án là phát triển SFEM nhằm phân tích đáp ứng cơ học ngẫu nhiên của dầm và cột trong điều kiện tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian. SFEM được phát triển trên cơ sở rời rạc hóa trường ngẫu nhiên của tính chất vật liệu bằng kỹ thuật tích phân trọng số, qua đó chuyển đổi trường ngẫu nhiên liên tục thành một tập hữu hạn các biến ngẫu nhiên cơ bản. Thông qua kỹ thuật nhiễu loạn (perturbation method) các biến ngẫu nhiên này được đưa vào hệ thống phục vụ phân tích. Trên cơ sở khai triển Taylor bậc nhất của đáp ứng của dầm, cột xung quanh giá trị kỳ vọng toán học của các tham số ngẫu nhiên, phương pháp đề xuất cho phép thiết lập trực tiếp các đại lượng thống kê của ứng xử của dầm, cột, bao gồm: chuyển vị, trị riêng của bài toán dao động riêng, và tải trọng tới hạn của cột chịu nén đúng tâm.

Song song với SFEM được đề xuất nghiên cứu và phát triển, phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) cũng được phát triển độc lập nhằm đánh giá và xác thực độ chính xác cũng như tính phù hợp của kết quả phân tích. MCS là phương pháp thống kê trong đó, trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu được mô phỏng bằng biểu diễn phổ (spectral representation method – SRM) để tạo ra các hàm mẫu (realizations), sau đó kết hợp FEM tiêu chuẩn trong từng lần mô phỏng. Các kết quả thu được xử lý bằng các công cụ thống kê mô tả nhằm xác định các đại lượng thống kê của đáp ứng của dầm, cột.

Ngoài ra, luận án còn tập trung phân tích định lượng ảnh hưởng của các tham số của trường ngẫu nhiên không gian, bao gồm: Hệ số biến thiên của tính chất vật liệu, chiều dài tương quan trong không gian và tương quan chéo giữa các trường ngẫu nhiên của tính chất vật liệu, đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Trong luận án này, dầm và cột được nghiên cứu theo mô hình thanh phẳng. Mô đun đàn hồi E và mật độ khối lượng ρ được mô hình hóa bằng hai trường ngẫu nhiên Gaussian dừng trong không gian, có chung hàm tự tương quan chuẩn hóa dạng mũ và cùng các chiều dài tương quan theo từng phương. Hàm hiệp phương sai chéo giữa hai trường sử dụng cùng cấu trúc tương quan không gian, với hệ số tương quan chéo tại cùng một điểm $\gamma \in [-1, 1]$ không phụ thuộc vị trí. Biến động ngẫu nhiên của tính chất vật liệu trong phạm vi vừa và nhỏ. Mô hình SFEM được xây dựng cho mặt cắt ngang hình chữ nhật không thay đổi kích thước, trên cơ sở lý thuyết dầm Euler–Bernoulli. Bài toán được giới hạn ở uốn phẳng; trục hình học được sử dụng làm trục tham chiếu, sự dịch chuyển ngẫu nhiên của tâm đàn hồi và các hiệu ứng ghép ngoài mặt phẳng không được xét trực tiếp.

Luận án nghiên cứu ảnh hưởng ngẫu nhiên của tính chất vật liệu đến ứng xử tổng thể của dầm, cột bao gồm: chuyển vị, giá trị riêng của bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính, tải trọng tới hạn. Ba bài toán cơ học cơ bản được nghiên cứu và phát triển trong khuôn khổ luận án bao gồm: bài toán ứng xử tĩnh ngẫu nhiên, bài toán trị riêng trong phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính và bài toán ổn định tổng thể ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm. Phân tích chủ yếu tập trung thiết lập các đại lượng thống kê của đáp ứng của dầm, cột như kỳ vọng, phương sai và hệ số biến thiên (COV) đối với các đại lượng đáp ứng như chuyển vị, giá trị riêng của bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính và tải trọng tới hạn mất ổn định, nhằm định lượng và đánh giá ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên trong tính chất vật liệu đến ứng xử của dầm, cột trong điều kiện bất định.

4. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ Ý NGHĨA THỰC TIỄN CỦA LUẬN ÁN

Luận án đóng góp thêm tri thức mới vào lĩnh vực cơ học ngẫu nhiên bằng cách phát triển SFEM để phân tích đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột khi tính chất vật liệu biến đổi ngẫu nhiên trong không gian hai chiều và ba chiều. Thông qua việc tích hợp các trường ngẫu nhiên không gian vào kết cấu dầm và cột, nghiên cứu đã mở rộng phạm vi ứng dụng của SFEM từ mô hình tính chất vật liệu ngẫu nhiên một chiều sang các mô hình trường ngẫu nhiên không gian đa chiều gần với thực tế hơn, đồng thời lượng hóa được ảnh hưởng của các đặc trưng ngẫu nhiên đến đáp ứng của dầm và cột. Kết quả thu được góp phần hoàn thiện lý thuyết phân tích kết cấu trong điều kiện bất định và làm phong phú thêm khung lý thuyết về SFEM trong các bài toán phân tích tĩnh, phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm và ổn định cột là những cấu kiện cơ bản của ngành xây dựng.

Phương pháp được phát triển trong luận án đã cung cấp cơ sở để mô phỏng và dự báo đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột trong điều kiện thực tế có yếu tố bất định, từ đó hỗ trợ thiết kế kết cấu theo hướng củng cố tính bền vững của hệ thống. Việc mô hình hóa tính chất vật liệu bằng trường ngẫu nhiên không gian giúp phản ánh chính xác hơn sự không đồng nhất thực tế trong sản xuất và thi công, đặc biệt trong các công trình sử dụng vật liệu mới hoặc có yếu tố bất định. Phương pháp được phát triển cung cấp công cụ xác định các đặc trưng thống kê của đáp ứng đối với cấu kiện dầm, cột thỏa mãn các giả thiết của mô hình. Các kết quả góp phần đánh giá ảnh hưởng của tính không đồng nhất ngẫu nhiên của vật liệu đến độ phân tán đáp ứng, đồng thời tạo cơ sở cho các nghiên cứu tiếp theo về đánh giá độ tin cậy và ứng dụng trong phân tích kết cấu.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để giải quyết các mục tiêu khoa học đặt ra, luận án sử dụng kết hợp các phương pháp giải tích, phương pháp số và mô phỏng thống kê, cụ thể bao gồm:

Phương pháp giải tích cơ học: Sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli để thiết lập các phương trình cân bằng vi phân tổng quát mô tả ứng xử tĩnh, đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm và ổn định của cột.

Kỹ thuật rời rạc hóa trường ngẫu nhiên: Phát triển kỹ thuật tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên không gian đa chiều (2D, 3D) liên tục của tính chất vật liệu thành tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên cơ bản. Kỹ thuật này giúp phân tách tường minh thành phần tất định và ngẫu nhiên trong các ma trận đặc trưng của hệ thống.

Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) và nhiễu loạn: Phát triển mô hình SFEM kết hợp với phương pháp nhiễu loạn bậc nhất thông qua khai triển chuỗi Taylor. Hướng tiếp cận này cho phép xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê bậc thấp (kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên) của đáp ứng cơ học mà không yêu cầu quá trình tính toán lặp.

Phương pháp mô phỏng thống kê và kiểm chứng: Sử dụng mô phỏng Monte Carlo (MCS) làm tiêu chuẩn đối sánh độc lập. Sự hội tụ và độ chính xác của SFEM được xác thực qua việc so sánh với MCS và kết quả của các nghiên cứu trước đây.

Phương pháp khảo sát tham số định lượng: Luận án tiến hành khảo sát định lượng nhằm phân tích ảnh hưởng của các đặc trưng trường ngẫu nhiên (chiều dài tương quan, hệ số biến thiên, tương quan chéo) đến sự phân tán đáp ứng cơ học ngẫu nhiên của dầm, cột, từ đó xác lập các quy luật cơ học ngẫu nhiên.

CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH NGẪU NHIÊN KẾT CẤU

1.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm hoặc hành động được thực hiện trong cùng một điều kiện, nhưng kết quả không thể dự đoán chắc chắn trước khi thực hiện. Một không gian xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên X ký hiệu là (Ω, *F*, *P*) trong đó: Ω là không gian mẫu, *F* là một sigma-đại số, tức là tập các biến cố là các tập con của Ω thỏa mãn các tính chất toán học nhất định, *P* là hàm xác suất, ánh xạ mỗi sự kiện trong *F* tới một số thực trong đoạn [0, 1]. Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ đo được từ Ω vào R.

Hai loại biến ngẫu nhiên thường gặp là biến ngẫu nhiên liên tục và biến ngẫu nhiên rời rạc. Đối với biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ và hàm phân phối tích lũy $F_X(x)$. Kỳ vọng toán, phương sai và mô-men bậc *n* được xác định lần lượt như (1.1), (1.2), (1.3). Hiệp phương sai của hai biến ngẫu nhiên X và Y được xác định như (1.4) với $f_{X,Y}(x,y)$ là hàm mật độ xác suất chung của hai biến ngẫu nhiên X và Y. μ_X, μ_Y là kỳ vọng toán của các biến ngẫu nhiên X và Y.

$$\mu = \mathbb{E}[\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \tag{1.1}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[(\mathrm{X}-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx \tag{1.3}$$

$$Cov[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathbb{E}\left[(\mathrm{X}-\mu_X)(\mathrm{Y}-\mu_Y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \tag{1.4}$$

1.2. TRƯỜNG NGẪU NHIÊN

Thay vì trả về một giá trị vô hướng như biến ngẫu nhiên, mỗi hiện thực hóa (realization) của một hàm ngẫu nhiên là một hàm tất định, thường được gọi là quỹ đạo mẫu. Tập hợp các quỹ đạo mẫu này phản ánh toàn diện sự thăng giáng của hệ thống dưới ảnh hưởng của yếu tố ngẫu nhiên. Khái niệm hàm ngẫu nhiên được phân loại dựa trên bản chất của biến độc lập: nó được gọi là quá trình ngẫu nhiên (stochastic process) nếu biến độc lập là thời gian *t*, và được định danh là trường ngẫu nhiên (random field) khi biến này là tọa độ không gian **x**. Cho một không gian xác suất (Ω, *F*, *P*) trong đó:

- Ω là không gian mẫu,

- *F* là σ-đại số các biến cố,
- *P* là hàm xác suất trên *F*.

Khi đó, một hàm ngẫu nhiên được định nghĩa là một ánh xạ hai biến $T(\mathbf{x},\theta)$: $D\times\Omega\rightarrow R$, trong đó:

- $D \subseteq R^n$ là miền tham số (có thể biểu diễn thời gian, không gian, hoặc các biến độc lập khác),
- Với mỗi $,\theta = \theta_i \in \Omega$ thì $T(\mathbf{x},\theta_i)$ là một hiện thực hóa của trường ngẫu nhiên $T(\mathbf{x},\theta)$ hay một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên.

Tương ứng với số chiều của chỉ mục **x** nghĩa là số lượng biến mà hàm ngẫu nhiên phụ thuộc thì có các trường ngẫu nhiên khác nhau: trường ngẫu nhiên 1D, trường ngẫu nhiên 2D và trường ngẫu nhiên 3D. Khi $\mathbf{x} = \mathbf{x_i}$ thì $T(\mathbf{x}_i,\theta)$ là một biến ngẫu nhiên hoặc một véc tơ tập hợp của biến ngẫu nhiên. Trong trường hợp $T(\mathbf{x}_i,\theta)$ là một biến ngẫu nhiên $T(\mathbf{x},\theta)$ gọi là trường ngẫu nhiên đơn biến. Còn trong trường hợp $T(\mathbf{x}_i,\theta)$ là một véc tơ ngẫu nhiên thì trường ngẫu nhiên $T(\mathbf{x},\theta)$ là trường ngẫu nhiên đa biến. Xét một trường ngẫu nhiên một chiều $T(x,\theta)$ với $x \in R$ tương ứng với các giá trị của trường ngẫu nhiên tại các vị trí khác nhau trong trường ngẫu nhiên khi đó ta có các biến ngẫu nhiên: $T(x_1,\theta)$, $T(x_2,\theta),\ldots,$ $T(x_p,\theta)$.

Xét một trường ngẫu nhiên một chiều $T(x,\theta)$ với $x \in R$, tương ứng có các biến ngẫu nhiên $T(x_1,\theta)$, $T(x_2,\theta),\ldots,$ $T(x_p,\theta)$. Hàm phân phối xác suất tích lũy và hàm mật độ xác suất của trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ được xác định theo (1.5) và (1.6). Khi phân phối hữu hạn chiều có mật độ xác suất chung, mật độ này được xác định từ hàm phân phối tích lũy theo công thức (1.6).

$$F_{T(x_1,\theta),T(x_2,\theta),\ldots,T(x_p,\theta)}\left(t_1,t_2,\ldots,t_p\right) = P\left[\left\{\theta\in\Omega : T\left(x_1,\theta\right)\le t_1, T\left(x_2,\theta\right)\le t_2,\ldots, T\left(x_p,\theta\right)\le t_p\right\}\right] \quad (1.5)$$

$$f_{T(x_1,\theta),T(x_2,\theta),\ldots,T(x_p,\theta)}\left(t_1,t_2,\ldots,t_p\right) = \frac{\partial^p}{\partial t_1\partial t_2\ldots\partial t_p} F_{T(x_1,\theta),T(x_2,\theta),\ldots,T(x_p,\theta)}\left(t_1,t_2,\ldots,t_p\right) \quad (1.6)$$

Dựa trên hàm mật độ xác suất được ký hiệu là $f_{T(x,\theta)}$ của $T(x,\theta)$, mô-men gốc bậc *q* của trường ngẫu nhiên được xác định như (1.7), với $q = 1$ ta có mô-men gốc bậc nhất của trường ngẫu nhiên là hàm kỳ vọng như (1.8). Mô men trung tâm bậc *q* của trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ được xác định như (1.9), với $q = 2$ ta có mô-men trung tâm bậc hai như phương trình (1.10).

$$m_q\left(x\right) = \mathbb{E}\left[T^q\left(x,\theta\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^q f_{T(x,\theta)}\left(t\right)dt \quad (1.7)$$

$$\mu_T\left(x\right) = \mathbb{E}\left[T\left(x,\theta\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{T(x,\theta)}\left(t\right)dt \quad (1.8)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(T\left(x,\theta\right)-\mu_T\left(x\right)\right)^q\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\mu_T\left(x\right)\right)^q f_{T(x,\theta)}\left(t\right)dt \tag{1.9}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(T\left(x,\theta\right)-\mu_T\left(x\right)\right)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\mu_T\left(x\right)\right)^2 f_{T(x,\theta)}\left(t\right)dt \tag{1.10}$$

Hàm tự tương quan $R_T\left(x_i,x_j\right)$ của trường ngẫu nhiên *T(x,θ)* xác định mối tương quan của các giá trị của trường ngẫu nhiên *T(xi,θ)* và *T(xj,θ)* với $x_i=x_1,x_2,...,x_p$ và $x_j=x_1,x_2,...,x_p$. Hàm tự tương quan $R_T\left(x_i,x_j\right)$ của trường ngẫu nhiên *T(x)* được định nghĩa như (1.11).

$$R_T\left(x_i,x_j\right)=\mathbb{E}\left[\left(T\left(x_i,\theta\right)T\left(x_j,\theta\right)\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}t_i t_j f_{T(x_i)T\left(x_j\right)}\left(t_i,t_j\right)dt_i dt_j \tag{1.11}$$

Hàm tự hiệp phương sai $C_T\left(x_i,x_j\right)$ của trường ngẫu nhiên *T(x,θ)* được xác định như (1.12). Đối với trường ngẫu nhiên có hàm kỳ vọng bằng không thì hàm tự hiệp phương sai bằng hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên. Khi đó, xét tại hai giá trị của $x_i = x_j = x$ thì hàm phương sai được xác định thông qua hàm tự hiệp phương sai như (1.13).

$$C_T\left(x_i,x_j\right)=R_T\left(x_i,x_j\right)-\mu_T\left(x_i\right)\mu_T\left(x_j\right) \tag{1.12}$$

$$Var\left[T\left(x,\theta\right)\right]=C_T\left(x,x\right)=\mathbb{E}\left[\left(T\left(x,\theta\right)-\mu_T\left(x\right)\right)^2\right] \tag{1.13}$$

Chuẩn hóa hàm tự hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên thu được hệ số tự tương quan như (1.14). Để đo sự phụ thuộc của hai trường ngẫu nhiên khác nhau *T1(x)* và *T2(y)* sử dụng hàm tương quan chéo $R_{T_1T_2}\left(x,y\right)$ như (1.15). Tương tự với trường hợp một trường ngẫu nhiên, hàm hiệp phương sai chéo của hai trường ngẫu nhiên được xác định như (1.16).

$$\rho_T\left(x_i,x_j\right)=\frac{C_T\left(x_i,x_j\right)}{\sqrt{C_T\left(x_i,x_i\right)}\sqrt{C_T\left(x_j,x_j\right)}} \tag{1.14}$$

$$R_{T_1T_2}\left(x,y\right)=\mathbb{E}\left[\left(T_1\left(x\right)T_2\left(y\right)\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}t_1 t_2 f_{T_1(x)T_2(y)}\left(t_1,t_2\right)dt_1 dt_2 \tag{1.15}$$

$$C_{T_1T_2}\left(x,y\right)=R_{T_1T_2}\left(x,y\right)-\mu_{T_1}\left(x\right)\mu_{T_2}\left(y\right) \tag{1.16}$$

Trường ngẫu nhiên *T(x,θ)* là trường ngẫu nhiên Gaussian nếu bất kỳ véc tơ ngẫu nhiên {*T(x1,θ), T(x2,θ),..., T(xn,θ)*} bao gồm các biến ngẫu nhiên Gaussian nhiều chiều. Trường ngẫu nhiên Gaussian hoàn toàn xác định khi có được các đại lượng thống kê: hàm kỳ vọng $\mu_T\left(x\right)$, hàm phương sai $\sigma_T^2\left(x\right)$ và hàm tự tương quan $R_T\left(x_i,x_j\right)$. Trường ngẫu nhiên dừng là trường ngẫu nhiên có hàm kỳ vọng, hàm phương sai là hằng số và hàm tự

tương quan chỉ phụ thuộc vào $\tilde{x} = x_j - x_i$. Giả thiết về tính Ergodic của trường ngẫu nhiên dừng: các đặc trưng thống kê mẫu tính trên miền không gian như hàm trung bình mẫu, hàm phương sai mẫu sẽ hội tụ về các tham số lý thuyết của quần thể tương ứng là hàm kỳ vọng, hàm phương sai khi kích thước miền khảo sát tiến tới vô cùng.

1.3. TỔNG QUAN CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN

Trong SFEM, trường ngẫu nhiên của các tham số đầu vào được biểu diễn gần đúng bằng một tập hữu hạn các biến ngẫu nhiên. Các phương pháp có thể được trình bày theo hai nhóm: biểu diễn trường Gaussian và biểu diễn trường phi Gaussian [113]. Đối với trường Gaussian, hàm kỳ vọng và hàm hiệp phương sai xác định các phân phối hữu hạn chiều của trường [115]. Các mô hình hiệp phương sai và phép khai triển Karhunen-Loève (K-L) được nghiên cứu, chẳng hạn với hàm hiệp phương sai mũ biến đổi trong [112]. Ngoài các biểu diễn cho trường dừng, Deodatis và Shinozuka [34] phát triển mô hình tự hồi quy cho quá trình ngẫu nhiên không dừng. Việc lựa chọn mô hình Gaussian cần phù hợp với dữ liệu và giả thiết của bài toán.

1.3.1. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian

Trên cơ sở các tài liệu tổng quan [80], [115], luận án trình bày các phương pháp rời rạc hóa trường Gaussian theo ba nhóm: biểu diễn bằng giá trị tại các điểm; biểu diễn thông qua tích phân hoặc trung bình trên miền phần tử; và biểu diễn bằng chuỗi các hàm tất định với hệ số ngẫu nhiên. Các cách tiếp cận này chuyển bài toán có đầu vào là trường ngẫu nhiên thành bài toán gần đúng với một tập hữu hạn các biến ngẫu nhiên.

1.3.1.1. Nhóm các phương pháp biểu diễn điểm

Trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ được rời rạc thành các biến ngẫu nhiên tại một hay vài điểm x_i thuộc phần tử. Độ lớn của trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ tại vị trí $x = x_i$ được xác định như (1.17). Phương sai, giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên được xác định thông qua giá trị của trường ngẫu nhiên tại vị trí $x = x_i$. Sự tương quan giữa hai điểm có thể tính gần đúng thông qua hàm tự tương quan như (1.18).

$$T(x,\theta) \approx \tilde{T}(x,\theta) = T(x_i,\theta); \quad x_i \in V_e \tag{1.17}$$

$$R_{x_i,x_j} = R_T(x_i, x_j) \tag{1.18}$$

Nhóm phương pháp này có ưu điểm ma trận hiệp phương sai là hoàn toàn xác định và dương có thể tính toán đơn giản. Các biến ngẫu nhiên này được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên sẽ có cùng hàm phân phối xác suất với trường ngẫu nhiên. Nhược điểm

chính của nhóm phương pháp này khi kết hợp với FEM đòi hỏi kích thước của phần tử phải đủ nhỏ để các tính chất của trường ngẫu nhiên không thay đổi trong một phần tử. Dẫn đến trong một số trường hợp khi chia lưới phần tử lớn đòi hỏi khối lượng và thời gian tính toán lớn.

1.3.1.2. Nhóm các phương pháp biểu diễn trung bình

a. Phương pháp trung bình trên miền phần tử

Phương pháp trung bình trên miền phần tử: Trường ngẫu nhiên được biểu diễn thành một biến ngẫu nhiên bằng cách xấp xỉ trường ngẫu nhiên trên miền phần tử V_e. Như vậy dựa vào lưới phần tử, trường ngẫu nhiên được giả định là không thay đổi trên toàn miền phần tử. Trường ngẫu nhiên được xấp xỉ thành một biến ngẫu nhiên theo (1.19). Phương pháp này được đề xuất bởi nhóm tác giả Vanmarcke và Grigoriu [121].

$$T\left(x,\theta\right) \approx \tilde{T}\left(x,\theta\right) = \frac{1}{V_e}\int_{V_e} T\left(x,\theta\right) dV_e = X_e; \quad x \in V_e \tag{1.19}$$

Trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ được biểu diễn thành tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên X_e. Nếu lưới phần tử được chia thành N_e phần tử khi đó tập hợp các biến ngẫu nhiên sẽ bao gồm N_e. Các biến này tập hợp thành một véc tơ ngẫu nhiên $\{X_1, X_2,\ldots, X_{Ne}\}$. Giá trị trung bình và ma trận hiệp phương sai được xác định thông qua hàm trung bình và hàm hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên bằng cách lấy tích phân của các hàm này trên miền phần tử V_e.

Vanmarcke và Grigoriu [121] sử dụng đặc trưng trung bình không gian để phân tích thống kê bậc hai của chuyển vị dầm có độ cứng biến thiên ngẫu nhiên dọc trục. Trong phương pháp trung bình phần tử, kỳ vọng và hiệp phương sai của các biến trung bình được xác định bằng tích phân các hàm tương ứng của trường; các đặc trưng trung bình không gian cũng được nghiên cứu trong [72]. Các vấn đề rời rạc hóa trường được tổng quan trong [80]. Với miền phần tử phức tạp, việc tính các tích phân hiệp phương sai có thể cần tích phân số. Ma trận hiệp phương sai được tính chính xác luôn bán xác định dương; khi tính gần đúng cần kiểm soát sai số số học để bảo toàn tính chất này. Trung bình tuyến tính của trường Gaussian vẫn là biến Gaussian. Với trường phi Gaussian, chỉ biết kỳ vọng và hiệp phương sai chưa đủ để xác định đầy đủ phân phối của các biến trung bình.

b. Kỹ thuật tích phân trọng số

Phương pháp tích phân trọng số biểu diễn các thành phần ngẫu nhiên của ma trận độ cứng bằng những tích phân của trường vật liệu nhân với các hàm trọng số tất định trên miền phần tử. Cách tiếp cận này được trình bày trong các công trình của Deodatis [32],

Deodatis và Shinozuka [35], Deodatis và cộng sự [36], cùng với Takada [119], [120]. Trong phân tích tuyến tính ma trận độ cứng của phần tử được xác định như (1.20) với [*B*] là ma trận tính biến dạng và ma trận đàn hồi [*D*].

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e \tag{1.20}$$

Xem xét trường hợp ma trận hệ số đàn hồi thu được dưới dạng tích số ma trận các hệ số đàn hồi trung bình $[D_0]$ và một trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ một chiều có kỳ vọng bằng không được xác định như (1.21).

$$[D] = [D_0]\left[1 + T(x,\theta)\right] \tag{1.21}$$

Thay (1.21) vào (1.20), $[K]_e$ có thể được viết dưới dạng (1.22).

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D_0][B] dV_e + \int_{V_e} T(x,\theta)[B]^T [D_0][B] dV_e \tag{1.22}$$

Ma trận tính biến dạng [*B*] được xác định bằng cách lấy đạo hàm của các hàm dạng của phần tử như (1.23) vì vậy $[B]^T [D_0][B]$ được xác định là các đa thức của các biến *x, y, z*. Vì vậy (1.22) có thể được viết lại dưới dạng (1.24) với các đại lượng như (1.25) và (1.26). N_w là số lượng biến ngẫu nhiên được biểu diễn thông qua một phần tử, trong khi *m, n, t* là chỉ số mũ của các đơn thức *x, y, z.*

$$[B] = [\nabla][N] \tag{1.23}$$

$$[K]_e = [K_0]_e + \sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i] X_i \tag{1.24}$$

$$[K_0]_e = \int_{V_e} [B]^T [D_0][B] dV_e \tag{1.25}$$

$$X_i = \int_{V_e} x^n y^m z^t T(x,\theta) dV_e \tag{1.26}$$

Các hàm trọng số trong phương pháp này phụ thuộc vào hàm dạng và mô hình phần tử được lựa chọn. Deodatis [32] và Deodatis và Shinozuka [35] thiết lập ma trận độ cứng ngẫu nhiên và phân tích độ biến thiên đáp ứng của hệ thanh bằng tích phân trọng số. Takada [119] mở rộng cách tiếp cận cho hệ có trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên nhiều chiều. T.D. Hien [116] áp dụng tích phân trọng số để phân tích chuyển vị dọc của thanh có tiết diện thay đổi. Noh [87] xây dựng SFEM cho tấm composite có năm tham số vật liệu ngẫu nhiên và xét tương quan giữa chúng.

1.3.1.3. Nhóm các phương pháp mở rộng chuỗi biểu diễn trường ngẫu nhiên

Nhóm phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên dưới dạng mở rộng chuỗi thường được kết hợp với SFEM theo hướng tiếp cận phổ (SSFEM) được đề xuất bởi Ghanem và Spanos [49]. Trường ngẫu nhiên được biểu diễn dưới dạng chuỗi hữu hạn của các hàm tất định và các biến ngẫu nhiên.

a. Phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève (K – L)

Phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève của trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ dựa trên sự phân tích phổ của hàm tự hiệp phương sai. Hàm tự hiệp phương sai là hàm bị chặn, đối xứng và xác định dương, hàm tự hiệp phương sai như (1.27)

$$C_T\left(x_i, x_j\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n\left(x_i\right) \varphi_n\left(x_j\right) \tag{1.27}$$

Trong đó:

+ φ_n : Hàm riêng xác định và trực giao của hàm tự hiệp phương sai;

+ λ_n : Giá trị riêng của hàm tự hiệp phương sai.

Giá trị riêng λ_n và hàm riêng φ_n của hàm tự hiệp phương sai được xác định từ tích phân Fredholm với mọi $n = 1,2,\ldots,\infty$ với miền lấy tích phân D là miền xác định của trường ngẫu nhiên như (1.28).

$$\int_D C_T\left(x_i, x_j\right) \varphi_n\left(x_i\right) dx_i = \lambda_n \varphi_n\left(x_j\right) \tag{1.28}$$

Trong miền xác định D các hàm riêng φ_n là các hàm trực giao do đó các hàm riêng thỏa mãn phương trình (1.29) với δ_{ij} là một hàm Kronecker-delta. Các giá trị riêng λ_n là tập hợp các số thực dương. Với mọi thể hiện của trường ngẫu nhiên $T\left(x,\theta\right)$ có thể được phân tích như (1.28) nên trường ngẫu nhiên có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi [52].

$$\int_D \varphi_i\left(x\right) \varphi_j\left(x\right) dx = \delta_{\mathrm{ij}} \tag{1.29}$$

$$T\left(x,\theta\right) = \mu_T\left(x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, \xi_n\left(\theta\right) \varphi_n\left(x\right) \tag{1.30}$$

Với các đại lượng:

+ $\mu_T\left(x\right)$: Hàm kỳ vọng của trường ngẫu nhiên $T\left(x,\theta\right)$;

+ $\xi_n\left(\theta\right)$: Tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên trực giao và không tương quan được xác định như (1.31).

$$\xi_n\left(\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_D \left(T\left(x,\theta\right) - \mu_T\left(x\right)\right) \varphi_n\left(x\right) dx \tag{1.31}$$

Tập hợp hữu hạn các biến $\xi_n(\theta)$ có kỳ vọng toán học và phương sai như (1.32), (1.33).

$$\mathbb{E}\left[\xi_n(\theta)\right] = 0 \tag{1.32}$$

$$Cov\left[\xi_i(\theta), \xi_j(\theta)\right] = \delta_{\mathrm{ij}} \tag{1.33}$$

Đối với trường Gaussian, các hệ số chuẩn hóa trong khai triển K-L là những biến Gaussian độc lập, có kỳ vọng bằng không và phương sai bằng một. Trong tính toán, chuỗi được cắt sau *N* số hạng. Khi các trị riêng được sắp xếp giảm dần, việc giữ *N* trị riêng lớn nhất cho xấp xỉ có sai số bình phương trung bình tích phân trên miền nhỏ nhất trong các biểu diễn tuyến tính *N* số hạng; sai số này bằng tổng các trị riêng bị cắt [52]. Các biểu thức xấp xỉ trường và hàm hiệp phương sai được trình bày trong (1.34), (1.35).

$$T(x,\theta) \approx \tilde{T}(x,\theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\,\xi_n(\theta)\varphi_n(x) \tag{1.34}$$

$$C_T(x_i, x_j) \approx \tilde{C}_T(x_i, x_j) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n(x_i)\varphi_n(x_j) \tag{1.35}$$

Phương sai của sai số trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ và trường ngẫu nhiên xấp xỉ $\tilde{T}(x,\theta)$ được xác định như (1.36). Dễ dàng thấy rằng phương sai của trường ngẫu nhiên xấp xỉ khi triển khai theo chuỗi *K - L* luôn nhỏ hơn phương sai của trường ngẫu nhiên thực.

$$Var\left[T(x,\theta) - \tilde{T}(x,\theta)\right] = \sigma_T^2(x) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi^2(x) \tag{1.36}$$

b. Phương pháp mở rộng chuỗi trực giao

Các phương pháp khai triển chuỗi trực giao và rời rạc hóa trường tối ưu được trình bày trong các nghiên cứu của Zhang và Ellingwood [135], Li và Der Kiureghian [77] và báo cáo tổng quan [115]. Khai triển K-L cần giải bài toán tích phân Fredholm để xác định các hàm riêng. Trong cách khai triển trực giao với cơ sở được lựa chọn trước, trường được xấp xỉ bằng các hàm cơ sở tất định và các hệ số ngẫu nhiên mà không cần trực tiếp xác định các hàm riêng của toán tử hiệp phương sai. Giả sử tập hợp các hàm trực giao $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\ldots,\infty}$, các hàm này tạo thành cơ sở của không gian xác suất của trường ngẫu nhiên. Trường ngẫu nhiên có hàm trung bình $\mu_T(x)$ và hàm tự hiệp phương sai $C_T(x_i, x_j) = \sigma_T(x_i, x_i)\sigma_T(x_j, x_j)\rho_T(x_i, x_j)$. Một thể hiện bất kỳ của trường ngẫu nhiên là một hàm tất định trong không gian xác suất và được biểu diễn thông qua các hàm trực giao $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\ldots,\infty}$ với $\chi_n(\theta)$ là tập hợp các biến ngẫu nhiên này có kỳ vọng toán bằng không.

Dựa vào đặc điểm trực giao của các hàm xác định $\{g_n(x)\}_{n=1,2,...,\infty}$ các biến ngẫu nhiên có các tính chất như (1.38) và (1.39).

$$T(x,\theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\theta) g_n(x) \tag{1.37}$$

$$\chi_n(\theta) = \int_V \left[T(x,\theta) - \mu_T(x)\right] g_n(x)\, dx \tag{1.38}$$

$$\mathbb{E}\left[\chi_n(\theta)\chi_m(\theta)\right] = \int_V \int_V C_T(x_i, x_j) g_n(x_i) g_m(x_j)\, dx_i dx_j \tag{1.39}$$

Trong trường hợp $T(x,\theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian thì các biến ngẫu nhiên $\chi_n(\theta)$ cũng là các biến ngẫu nhiên Gaussian có kỳ vọng bằng không và các biến ngẫu nhiên này có thể tương quan lẫn nhau. Chọn *N* số hạng của chuỗi để tính gần đúng trường ngẫu nhiên như (1.40) với đầy đủ hàm $\{g_n(x)\}_{n=1,2,...,\infty}$.

$$T(x,\theta) \approx \tilde{T}(x,\theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{N} \chi_n(\theta) g_n(x) \tag{1.40}$$

Các biến ngẫu nhiên Gaussian $\{\chi_n(\theta)\} = \{\chi_1(\theta), \chi_2(\theta), ..., \chi_N(\theta)\}$ của trường ngẫu nhiên Gaussian khi áp dụng phương pháp mở rộng chuỗi trực giao các biến ngẫu nhiên có thể tương quan lẫn nhau. Vì vậy có thể biểu diễn véc tơ này thông qua véc tơ các biến ngẫu nhiên chuẩn trực giao và không tương quan $\{\xi_n(\theta)\}$ qua phép phân tích phổ của ma trận hiệp phương sai như (1.41).

$$\sum\nolimits_{\chi\chi}[\Phi] = [\Phi][\Gamma] \tag{1.41}$$

Trong đó:

+ $\sum_{\chi\chi}$:Là ma trận tự hiệp phương sai;

+ $[\Phi]$: Ma trận có các cột là véc tơ riêng của ma trận hiệp phương sai ;

+ $[\Gamma]$: Là ma trận đường chéo chính là các trị riêng λ_i của ma trận $\sum_{\chi\chi}$.

Quan hệ giữa véc tơ biến ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\}$ và véc tơ các biến ngẫu nhiên trực chuẩn $\{\xi_n(\theta)\}$ như (1.42). Khi đó biến $\chi_n(\theta)$ được xác định như (1.43) với Φ_n^i là véc tơ riêng thứ *i* tương ứng với giá trị riêng λ_i.

$$\{\chi_n(\theta)\} = [\Phi][\Gamma]^{\frac{1}{2}} \{\xi_n(\theta)\} \tag{1.42}$$

$$\chi_n(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_{ni} \sqrt{\lambda_i}\, \xi_i(\theta) \tag{1.43}$$

Thay (1.43) vào (1.40) trường ngẫu nhiên Gaussian $T(x,\theta)$ được biểu diễn bằng phương pháp chuỗi trực giao như (1.44).

$$T(x,\theta) \approx \tilde{T}(x,\theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{N} g_n(x)\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_n^i \sqrt{\lambda_i}\xi_i(\theta) \right) \tag{1.44}$$

c. Phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu mở rộng

Phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu mở rộng được đề xuất bởi Li và Der Kiureghian [77]. Tập hợp các biến ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\} = \{T(x_1,\theta), T(x_2,\theta), ..., T(x_N,\theta)\}$ là giá trị của trường ngẫu nhiên *T(x,θ)* tại vị trí nút của lưới xấp xỉ. Nếu *T(x,θ)* là trường ngẫu nhiên Gaussian thì véc tơ ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\}$ bao gồm các biến ngẫu nhiên Gaussian. Véc tơ bao gồm các biến ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\}$ được biểu diễn bằng phân rã phổ cho ma trận tự hiệp phương sai như (1.45) của các biến ngẫu nhiên.

$$\{\chi_n(\theta)\} = \mu_\chi + \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\xi_n(\theta)\Phi_n \tag{1.45}$$

Trong đó:

+ λ_n : Giá trị riêng thứ *n* của ma trận hiệp phương sai;

+ Φ_n : Véc tơ riêng thứ *n* của ma trận hiệp phương sai;

+ μ_χ : Giá trị trung bình của các biến ngẫu nhiên;

+ $\{\xi_n(\theta)\}$: Véc tơ bao gồm các biến ngẫu nhiên chuẩn tắc độc lập.

Trường ngẫu nhiên *T(x,θ)* được biểu diễn như (1.46).

$$T(x,\theta) \approx \tilde{T}(x,\theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n(\theta)}{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n^T \sum\nolimits_{T(x,\theta)\{\chi_n(\theta)\}} \tag{1.46}$$

+ $\sum_{T(x,\theta)\{\chi_n(\theta)\}}$: Véc tơ hiệp phương sai giữa điểm *x* và các điểm nút.

d. Phương pháp tiếp cận phổ để biểu diễn trường ngẫu nhiên

Phương pháp biểu diễn phổ được trình bày trong các công trình của Shinozuka và Jan [108], Shinozuka và Deodatis [107]. Trong cách biểu diễn này, trường ngẫu nhiên được xấp xỉ bằng chuỗi lượng giác với các góc pha ngẫu nhiên. Xét trường ngẫu nhiên *T(x,θ)* dừng, đơn biến có kỳ vọng bằng không, hàm tự tương quan $R_{TT}(\xi)$ và $S_{TT}(\omega)$ là ký hiệu của hàm mật độ phổ công suất của trường ngẫu nhiên được xác định bằng phép biến đổi Fourier.

$$\mathbb{E}\left[T(x,\theta)\right] = 0 \tag{1.47}$$

$$\mathbb{E}\left[T(x,\theta)T(x+\xi,\theta)\right]=R_{TT}(\xi) \tag{1.48}$$

$$S_{TT}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{TT}(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \tag{1.49}$$

$$R_{TT}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{TT}(\omega)e^{i\omega\xi}d\omega \tag{1.50}$$

Trường ngẫu nhiên một chiều, dừng, đơn biến được biểu diễn là tổng chuỗi hữu hạn của chuỗi cosine như (1.51):

$$T(x,\theta)=\sqrt{2}\sum_{i=0}^{N-1}A_i\cos\left[\omega_i x+\varphi_i(\theta)\right] \tag{1.51}$$

Trong đó:

$$A_i=\sqrt{2S_{TT}(i\Delta\omega)\Delta\omega},\quad i=0,1,2,...,N-1 \tag{1.52}$$

$$\omega_i=i\Delta\omega\ ,\qquad i=0,1,2,...,N-1 \tag{1.53}$$

$$\Delta\omega=\frac{\omega_u}{N} \tag{1.54}$$

$$A_0=0\qquad;\quad S_{TT}(\omega_0)=0 \tag{1.55}$$

Trong (1.54) ω_u là tần số sóng cắt khi tần số lớn hơn tần số sóng cắt thì phổ công suất gần như bằng không. Để xác định tần số sóng cắt ω_u sử dụng phương trình (1.56) với sai số tương đối chấp nhận được $\varepsilon << 1$.

$$\int_0^{\omega_u}S_{TT}(\omega)d\omega=(1-\varepsilon)\int_0^{\infty}S_{TT}(\omega)d\omega \tag{1.56}$$

Hàm tự tương quan $R_{\tilde{T}\tilde{T}}(x_i,x_j)$ của trường ngẫu nhiên xấp xỉ $\tilde{T}(x,\theta)$ xác định (1.57).

$$R_{\tilde{T}\tilde{T}}(x_i,x_j)=\int_{-\omega_u}^{\omega_u}S_{TT}(\omega)e^{i\omega\xi}d\omega=2\int_0^{\omega_u}S_{TT}(\omega)\cos(\omega\xi)d\omega \tag{1.57}$$

Trong (1.51), $\varphi_i(\theta)$ là các góc pha là các biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân bố đều trong [0; 2π]. Xem xét trường ngẫu nhiên dừng, đơn biến có kỳ vọng bằng không. $R_{TT}(\xi)$ và $S_{TT}(\omega)$ của trường ngẫu nhiên như sau:

$$R_{TT}(\xi)=\sigma^2\exp\left[-\frac{|\xi_x|}{d_x}\right] \tag{1.58}$$

$$S_{TT}(\omega)=\frac{\sigma^2 d_x}{\pi\left[1+(\omega d_x)^2\right]} \tag{1.59}$$

Trong đó:

+ σ : Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên;

+ d_x: Chiều dài tương quan theo trục x;

+ $\xi_x = |x_2 - x_1|$: Khoảng cách giữa hai vị trí xét tương quan;

+ ω: Tần số sóng không gian.

1.3.2. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian

1.3.2.1. Các phương pháp biến đổi tương quan

a. Phương pháp biến đổi tương quan

Xem xét trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, có kỳ vọng toán bằng không và phương sai bằng *1*. Hàm mật độ phổ năng lượng của trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ là $S_{TT}(\omega)$. Một trường ngẫu nhiên $H(x,\theta)$, dừng, Non-Gaussian với hàm mật độ phổ năng lượng $S_{HH}(\omega)$ có thể được định nghĩa:

$$H(x,\theta) = Y^{-1}\{\Phi(T(x,\theta))\} \tag{1.60}$$

Trong đó:

+ Φ : Hàm phân phối xác suất tích lũy Gaussian chuẩn tắc;

+ Y: Hàm phân phối xác suất tích lũy biên của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian.

Như vậy phép biến đổi $Y^{-1}\Phi$ cho phép tính toán giá trị của trường $H(x,\theta)$ chỉ phụ thuộc vào giá trị độ lớn của trường ngẫu nhiên $T(x,\theta)$ ở cùng giá trị độ lớn của x. Các nghiên cứu khác dựa trên phương trình (1.60) để biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian gọi là phép tịnh tiến trường ngẫu nhiên. Điểm quan trọng của kỹ thuật này là phải lựa chọn được hàm phân bố xác suất cận biên của trường $H(x,\theta)$. Trường Non-Gaussian và hàm mật độ phổ công suất của nó $S_{HH}(\omega)$ phải thỏa mãn điều kiện tương quan như (1.61).

$$R_{HH}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Y^{-1}\{\Phi(T_1)\}Y^{-1}\{\Phi(T_2)\}\phi[T_1,T_2;R_{TT}(\tau)]dT_1dT_2 \tag{1.61}$$

Trong đó:

+ $T_1 = T(x,\theta)$, $T_2 = T(x+\tau,\theta)$;

+ $\phi[T_1,T_2;R_{TT}(\tau)]$: Hàm mật độ xác suất Gauss hai biến

b. Phương pháp mở rộng trường ngẫu nhiên biến đổi

Một trường ngẫu nhiên mở rộng Non-Gaussian ánh xạ đến các thể hiện của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian $H(x, \theta)$ với hàm phân phối xác suất cận biên của trường ngẫu

nhiên *Y* và hàm $S_{HH}(\omega)$. Yamazaki và Shinozuka [129] đã đề xuất một quy trình tính lặp $S_{HH}(\omega)$. Các thể hiện của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian được tạo ra dựa vào hàm mật độ phổ công suất cuối cùng sau khi được tính lặp và phép biến đổi trường ngẫu nhiên như (1.62).

$$S_{HH}^{(i+1)}(\omega) = \frac{S_{HH}^{(i)}(\omega)}{S_{TT}^{(i)}(\omega)} S_{TT}(\omega) \tag{1.62}$$

Deodatis và Micaletti [33] chỉ ra rằng thuật toán lặp của Yamazaki và Shinozuka có thể không tái hiện chính xác phân phối xác suất biên mục tiêu, đặc biệt đối với các quá trình phi Gaussian có độ lệch lớn. Một nguyên nhân là quá trình nền không còn Gaussian sau lần lặp đầu tiên, trong khi phép ánh xạ vẫn sử dụng hàm phân phối Gaussian chuẩn tắc. Phoon và các cộng sự [96] đã áp dụng kỹ thuật mở rộng chuỗi K-L để biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian cùng với kỹ thuật ánh xạ lặp phù hợp với hàm phân phối cận biên mục tiêu. Phương pháp cung cấp một kỹ thuật mô phỏng các trường ngẫu nhiên dừng và không dừng và cải tiến trong trường hợp biểu diễn các trường ngẫu nhiên có độ lệch lớn. Một hướng tiếp cận khác sử dụng khai triển đa thức nhiễu động để mô phỏng quá trình phi Gaussian không dừng được Sakamoto và Ghanem [101] phát triển.

1.3.2.2. Các phương pháp dựa trên triển khai đa thức nhiễu động

Sakamoto và Ghanem [101] phát triển phương pháp mô phỏng quá trình phi Gaussian không dừng bằng khai triển đa thức nhiễu động, với các đặc trưng xác suất mục tiêu. Trong biểu diễn (1.63), trường được xấp xỉ bằng một tổ hợp hữu hạn các đa thức Hermite của các biến Gaussian chuẩn độc lập.

$$u(\chi) = \sum_{i=1}^{Q} u_i(\chi)\Psi_i \tag{1.63}$$

Trong đó $\{\Psi_i\}_{i=1}^{Q} = P_j\left(\{\xi_n\}_{n=1}^{N}\right)$ là tập hợp hữu hạn các đa thức Hermite là hàm của tập hợp các biến ngẫu nhiên chuẩn Gaussian độc lập. *Q* là số lượng đa thức Hermite được giữ lại trong khai triển và *N* là số lượng hữu hạn của chuỗi xấp xỉ trường ngẫu nhiên theo phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève. Puig và cộng sự [97], [98] nghiên cứu hội tụ của khai triển đa thức Hermite/Polynomial Chaos và cách xác định hàm tương quan của quá trình Gaussian nền. Xấp xỉ Polynomial Chaos có thể cần nhiều hệ số khi số biến ngẫu nhiên hoặc bậc khai triển tăng [42]. Grigoriu [55] đánh giá độ chính xác và giới hạn của các cách biểu diễn K-L, biểu diễn phổ và biểu diễn lấy mẫu. Xiu và Karniadakis [128] phát triển

khai triển Wiener-Askey kết hợp phép chiếu Galerkin; lựa chọn cơ sở đa thức phù hợp với phân phối đầu vào giúp cải thiện tốc độ hội tụ.

1.4. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN

Trong những năm gần đây bài toán ngẫu nhiên thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Mối quan tâm chủ yếu tập trung phát triển các phương pháp số để phân tích hệ thống được mô tả bởi hệ phương trình chứa đạo hàm và vi phân có các hệ số ngẫu nhiên. Yếu tố ngẫu nhiên được đưa vào trong hệ phương trình chứa đạo hàm và vi phân này là do các yếu tố ngẫu nhiên của hệ thống hoặc các tham số không chắc chắn khi đưa vào phân tích. SFEM kết hợp với sự phát triển kỹ thuật máy tính hiện đại là công cụ hiệu quả để giải quyết bài toán ngẫu nhiên [20]. Bên cạnh nhóm phương pháp số phương pháp giải tích cũng được dùng để phân tích ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu. Các lời giải giải tích được xây dựng cho những lớp kết cấu với các giả thiết cụ thể [40]. Phạm vi áp dụng của mỗi lời giải phụ thuộc vào mô hình cơ học, đầu vào ngẫu nhiên và điều kiện biên được xét. Bucher và Shinozuka [24] sử dụng hàm Green để phân tích độ biến thiên đáp ứng của dầm và tấm có tính chất đàn hồi biến thiên ngẫu nhiên trong không gian. Kardara và cộng sự [71] sử dụng hàm Green hoặc phương pháp lực để phân tích dầm và khung tuyến tính siêu tĩnh. Shinozuka [106] phân tích các trường hợp giới hạn và thiết lập cận trên, cận dưới của độ biến thiên đáp ứng đối với kết cấu tĩnh định. Các kết quả này cung cấp cơ sở lý thuyết cho phân tích và đối chiếu đáp ứng ngẫu nhiên; phạm vi áp dụng phụ thuộc vào mô hình kết cấu, giả thiết đầu vào và điều kiện biên.

1.4.1. Phương pháp mô phỏng Monte Carlo

Phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) dựa trên việc tạo ra một tập hợp các hiện thực hóa của các trường ngẫu nhiên của các biến đầu vào. Thực hiện phân tích đáp ứng của kết cấu trên tập mẫu đó thu được tập hợp các đáp ứng của kết cấu. Thực hiện xử lý số liệu thống kê trên tập hợp các đáp ứng của kết cấu thu được các đặc trưng thống kê đáp ứng của kết cấu. Shinozuka và Jan [108] trình bày kỹ thuật mô phỏng số các quá trình ngẫu nhiên bằng biểu diễn phổ, được sử dụng để tạo mẫu đầu vào trong MCS. Phương pháp MCS tỏ ra là một công cụ mạnh mẽ nhưng khi bài toán phức tạp với số chiều tăng lên thì dẫn đến khối lượng tính toán lớn. Thời gian tính toán và chi phí tính toán vì vậy cũng tăng. Phương pháp này kết hợp kỹ thuật MCS và FEM tiêu chuẩn. Trong thực hành, phương pháp MCS bao gồm các bước chính như sau [59]: (1) Xác định tập hợp các biến ngẫu nhiên; (2) Xác định các đặc trưng thống kê của các biến ngẫu nhiên đầu vào như hàm mật độ xác suất, hàm tương quan; (3) Sử dụng các kỹ thuật biểu diễn trường ngẫu nhiên để tạo

ra tập hợp các hàm mẫu; (4) Dùng FEM tiêu chuẩn xác định để phân tích đáp ứng của kết cấu với mỗi thể hiện của trường ngẫu nhiên; (5) Phân tích thống kê xử lý số liệu thu được; (6) Đánh giá độ chính xác của quy trình. Theo FEM thiết lập công thức ma trận độ cứng phần tử như (1.64).

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e \tag{1.64}$$

Giả sử mô đun đàn hồi được mô tả toán học dưới dạng trường ngẫu nhiên có các hiện thực hóa của trường ngẫu nhiên là $\{T(x, E_i)\}_{i=1}^{N}$ với N là số thể hiện của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi được tạo ra để thực hiện MCS. Ma trận đàn hồi [D] chịu ảnh hưởng của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên nên ma trận [D] có thể được viết lại dưới dạng (1.65) với [D_0] là ma trận tất định:

$$[D] = [D_o] T(x, E_i) \tag{1.65}$$

Thay (1.65) vào (1.64) thu được phương trình (1.66):

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e = \int_{V_e} T(x, E_i) [B]^T [D_0][B] dV_e \tag{1.66}$$

Ma trận độ cứng tổng thể của toàn bộ kết cấu [K] được xác định từ $[K]_e$ như (1.67) với N_e là tổng số lượng các phần tử của kết cấu. Ký hiệu Ext là mở rộng ma trận độ cứng.

$$\left[K(E_i)\right] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext} \tag{1.67}$$

Phương trình cơ bản được thiết lập theo FEM như (1.68) với $\{U\}$ là véc tơ chuyển vị nút, $\{P\}$ là véc tơ tải trọng nút của kết cấu.

$$\left[K(E_i)\right]\{U(E_i)\} = \{P\} \tag{1.68}$$

Xử lý điều kiện biên phương trình (1.68) sau đó giải hệ phương trình thu được véc tơ chuyển vị nút $\{U(E_i)\}$. Thực hiện tính lặp trên không gian mẫu của trường ngẫu nhiên được tạo ra thu được tập hợp các véc tơ nghiệm chuyển vị toàn cục. Xử lý thống kê [115] trên tập hợp số liệu thu được các đặc trưng thống kê của mẫu như: giá trị trung bình mẫu như phương trình (1.69) và giá trị phương sai mẫu (1.70) của chuyển vị nút thứ j.

$$\bar{U}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} U_j(E_i) \tag{1.69}$$

$$s_{U_j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left[U_j(E_i) - \bar{U}_j\right]^2 \tag{1.70}$$

Trong trường hợp để so sánh mức độ biến thiên tương đối của những tập dữ liệu khác nhau, đặc trưng thống kê được sử dụng trong trường hợp này là hệ số biến thiên (COV) được xác định như (1.71) bằng tỷ số giữa độ lệch chuẩn mẫu và trung bình mẫu.

$$\mathrm{COV} = \frac{\sqrt{s_{U_j}^2}}{\left|\bar{U}_j\right|} \tag{1.71}$$

1.4.2. Phương pháp nhiễu loạn

Phương pháp nhiễu loạn sử dụng khai triển Taylor của các đại lượng trong phương trình cân bằng quanh trạng thái ứng với giá trị kỳ vọng của các tham số đầu vào. Các hệ số khai triển được xác định bằng cách thay vào phương trình và đồng nhất các thành phần cùng bậc. Các tài liệu [19], [41] cung cấp nền tảng tham khảo về phân tích kết cấu có đầu vào ngẫu nhiên. Kết cấu có các thông số ngẫu nhiên đầu vào hoặc tham số không chắc chắn được biểu diễn dưới dạng trường ngẫu nhiên. Áp dụng các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên đã trình bày trong mục 1.3 trường ngẫu nhiên được rời rạc thành tập hợp các biến ngẫu nhiên được biểu diễn như (1.72) có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$\{r\} = \{r_i\}_{i=1}^{N} = \{r_1, r_2, ..., r_n\} \tag{1.72}$$

Trong khuôn khổ của FEM phương trình cân bằng tổng thể của kết cấu như (1.73).

$$[K]\{U\} = \{P\} \tag{1.73}$$

Giả định các tham số để xây dựng các ma trận độ cứng [K] và véc tơ tải trọng $\{P\}$ biến động xung quanh giá trị kỳ vọng của nó. Dẫn đến các ma trận trong (1.73) cũng biến động xung quanh giá trị kỳ vọng [K_0], $\{U_0\}$ và $\{P_0\}$. Triển khai chuỗi Taylor của các đại lượng trong (1.73) xung quanh đại lượng là giá trị kỳ vọng toán thu được (1.74) - (1.76):

$$[K] = [K_0] + \sum_{i=1}^{N}\left[K_i^I\right] r_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[K_{\mathrm{ij}}^{II}\right] r_i r_j + ... \tag{1.74}$$

$$\{U\} = \{U_0\} + \sum_{i=1}^{N}\left\{U_i^I\right\} r_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{U_{\mathrm{ij}}^{II}\right\} r_i r_j + ... \tag{1.75}$$

$$\{P\} = \{P_0\} + \sum_{i=1}^{N}\left\{P_i^I\right\} r_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{P_{\mathrm{ij}}^{II}\right\} r_i r_j + ... \tag{1.76}$$

Các hệ số trong khai triển chuỗi Taylor được xác định như (1.77):

$$\begin{aligned}
\left[K_i^I\right] &= \left.\frac{\partial[K]}{\partial r_i}\right|_{\{r\}=0}; \left[K_{ij}^{II}\right] = \left.\frac{\partial^2[K]}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\{r\}=0}; \left\{U_i^I\right\} = \left.\frac{\partial\{U\}}{\partial r_i}\right|_{\{r\}=0} \\
\left\{U_{ij}^{II}\right\} &= \left.\frac{\partial^2\{U\}}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\{r\}=0}; \left\{P_i^I\right\} = \left.\frac{\partial\{P\}}{\partial r_i}\right|_{\{r\}=0}; \left\{P_{ij}^{II}\right\} = \left.\frac{\partial^2\{P\}}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\{r\}=0}
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Thay các biểu thức (1.74) - (1.76) vào (1.73) sau đó đồng nhất hóa các hệ số cùng bậc tại hai vế của phương trình ta thu được:

$$\{U_0\} = [K_0]^{-1}\{P_0\} \tag{1.78}$$

$$\{U_i^I\} = [K_0]^{-1}\left(\{P_i^I\} - [K_i^I]\{U_0\}\right) \tag{1.79}$$

$$\{U_{ij}^{II}\} = [K_0]^{-1}\left(\{P_{ij}^{II}\} - [K_i^I]\{U_j^I\} - [K_j^I]\{U_i^I\} - [K_{ij}^{II}]\{U_0\}\right) \tag{1.80}$$

Thay (1.78) đến (1.80) vào (1.75) nhận được đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu. Do đó các đại lượng thống kê của chuyển vị có thể được tính toán thông qua các đặc trưng thống kê của tập hợp các biến ngẫu nhiên $\{r\}$.

- ✓ Ước lượng bậc nhất và bậc hai giá trị trung bình toán của $\{U\}$:

$$\mathbb{E}^I[\{U\}] \approx \{U_0\} \tag{1.81}$$

$$\mathbb{E}^{II}[\{U\}] = \{U_0\} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\{U_{\text{ij}}^{II}\} Cov[r_i, r_j] \tag{1.82}$$

- ✓ Ước lượng bậc nhất và bậc hai của ma trận hiệp phương sai của véc tơ chuyển vị:

$$Cov^I[\{U\},\{U\}] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\{U_i^I\}\{U_j^I\}^T Cov[r_i, r_j] \tag{1.83}$$

$$\begin{aligned} Cov^{II}[\{U\},\{U\}] &= Cov^I[\{U\},\{U\}] \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\{U^{II}\}_{\text{ij}}\{U^{II}\}_{km}^T\left[\mathbb{E}(r_i r_k)\mathbb{E}(r_j r_m) + \mathbb{E}(r_i r_m)\mathbb{E}(r_j r_k)\right] \end{aligned} \tag{1.84}$$

1.4.3. Phương pháp tiếp cận phổ

Phương pháp tiếp cận phổ đề xuất bởi Ghanem và Spanos [53] và được phát triển trong các nghiên cứu của các tác giả khác [50], [89]. Kỹ thuật này áp dụng nhóm phương pháp mở rộng chuỗi để biểu diễn trường ngẫu nhiên của các thông số đầu vào không chắc chắn. Đáp ứng của kết cấu khi có các đại lượng đầu vào có tính ngẫu nhiên hoặc tham số không chắc chắn được biểu diễn là đa thức nhiễu động của các biến ngẫu nhiên. Đa thức nhiễu động được biểu diễn trong cơ sở của các hàm nhiễu động hoặc đa thức trực giao Askey. Xem xét kết cấu có *E* là trường ngẫu nhiên nên ma trận đàn hồi [*D*] có thể được viết dưới dạng (1.85) với [D_0] là ma trận tất định.

$$D(x,\theta) = [D_0]T(x,\theta) \tag{1.85}$$

Trong đó *T(x, θ)* được biểu diễn bằng phương pháp mở rộng chuỗi K-L như (1.86):

$$T(x,\theta) = \mu_T(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\xi_i(\theta)\varphi_i(x) \tag{1.86}$$

Trong đó:

+ $\mu_T(x)$: Hàm trung bình của trường ngẫu nhiên;

+ λ_i: Giá trị riêng;

+ $\varphi_i(x)$: Hàm riêng của hàm tự hiệp phương sai;

+ $\xi_i(\theta)$: Tập hợp các biến ngẫu nhiên được xác định như (1.87).

Nếu *T(x, θ)* là trường ngẫu nhiên Gaussian thì các biến ngẫu nhiên này là biến ngẫu nhiên chuẩn Gaussian trực giao và không tương quan.

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \left(T(x,\theta) - \mu_T(x)\right)\varphi_i(x)\,dx \tag{1.87}$$

Trong bối cảnh của FEM, $[K]_e$ được xác định (1.88):

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B]\,dV_e \tag{1.88}$$

Thay (1.86) vào (1.88) thu được (1.89):

$$\left[K_e\right] = \left[K_0^e\right] + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\Delta K_i^e\right] \xi_i(\theta) \tag{1.89}$$

Trong đó:

$$\left[K_0^e\right] = \int_{V_e} [B]^T \mu_T [D_0][B]\,dV_e \tag{1.90}$$

$$\left[\Delta K_i^e\right] = \sqrt{\lambda_i} \int_{V_e} [B]^T [D_0][B]\varphi_i(x)\,dV_e \tag{1.91}$$

Ma trận *K* được xác định như (1.92) được hình thành thông qua thuật toán ghép nối hệ ma trận cấp phần tử.

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta K_i \xi_i(\theta) \tag{1.92}$$

Trong đó:

$$K_0 = \sum_{e=1}^{N_e} \left[K_0^e\right]^{Ext} \tag{1.93}$$

$$\Delta K_i = \sum_{e=1}^{N_e} \left[\Delta K_i^e\right]^{Ext} \tag{1.94}$$

Với N_e là tổng số lượng của phần tử. Phương trình cân bằng của toàn kết cấu như (1.95) trong trường hợp tải trọng tất định.

$$\left(K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta K_i \xi_i(\theta)\right) U(\theta) = P \tag{1.95}$$

Trong đó $U(\theta)$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể. Chuyển vị của một nút bất kỳ *u(θ)* được biểu diễn tuyến tính thông qua tập hợp các biến ngẫu nhiên trực giao ψ_j như (1.96) với u_j là tọa độ của *u(θ)* trong không gian nhận ψ_j làm cơ sở. Biến ngẫu nhiên trực giao ψ_j được

biểu diễn dưới dạng đa thức nhiễu loạn của các biến ngẫu nhiên $\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}$. Các biến ngẫu nhiên trực giao ψ_j thỏa mãn (1.97) - (1.100).

$$u(\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}\right) \tag{1.96}$$

$$\Psi_0=1 \tag{1.97}$$

$$\mathbb{E}\left[\Psi_j\right]=0 \tag{1.98}$$

$$\mathbb{E}\left[\Psi_k\Psi_l\right]=1 \qquad k=l \tag{1.99}$$

$$\mathbb{E}\left[\Psi_k\Psi_l\right]=0 \qquad k\neq l \tag{1.100}$$

Véc tơ chuyển vị nút tổng thể của toàn kết cấu được biểu diễn thông qua ψ_j như (1.101):

$$U(\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}U_j\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}\right) \tag{1.101}$$

Thay (1.101) vào (1.95) thu được (1.102):

$$\left(K_0+\sum_{i=1}^{\infty}\Delta K_i\xi_i(\theta)\right)\sum_{j=0}^{\infty}U_j\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}\right)=P \tag{1.102}$$

Đặt $K_0=\Delta K_0$ và $\xi_0(\theta)=1$ khi đó phương trình (1.102) được viết lại như (1.103):

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\Delta K_i\xi_i(\theta)U_j\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{\infty}\right)-P=0 \tag{1.103}$$

Giữ lại *M* số hạng của chuỗi triển khai Karhunen–Loève và *Q* véc tơ cho việc mở rộng chuỗi nhiễu loạn của chuyển vị nút $U(\theta)$. *Q* sẽ phụ thuộc vào bậc của đa thức nhiễu động $\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=0}^{M}\right)$ phương trình (1.103) được viết lại như (1.104).

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{Q-1}\Delta K_i\xi_i(\theta)U_j\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=0}^{M}\right)-P=0 \tag{1.104}$$

Sai số của phương trình (1.104) do xấp xỉ chuỗi Karhunen–Loève và đa thức nhiễu loạn $\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=0}^{M}\right)$như (1.105).

$$\varepsilon_{M,Q}=\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{Q-1}\Delta K_i\xi_i(\theta)U_j\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=1}^{M}\right)-P \tag{1.105}$$

Để xấp xỉ với sai số là nhỏ nhất thì véc tơ chuyển vị $U(\theta)$trong không gian nhận các hàm $\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=0}^{M}\right)$làm cơ sở. Điều đó có nghĩa phần dư phải trực giao với các hàm $\Psi_j\left(\left\{\xi_i(\theta)\right\}_{i=0}^{M}\right)$ do đó:

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{M,Q},\Psi_k\right]=0 \qquad k=0,1,2,...,Q-1 \tag{1.106}$$

Thay (1.105) vào (1.106) thu được (1.107):

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{Q-1}\mathbb{E}\left[\xi_i(\theta)\Psi_j\Psi_k\right]\Delta K_i U_j-\mathbb{E}\left[P\Psi_k\right]=0 \tag{1.107}$$

Đặt $\mathbb{E}\left[\xi_i(\theta)\Psi_j\Psi_k\right]=c_{ijk}$; $\mathbb{E}\left[P\Psi_k\right]=P_k$ thay vào (1.107) ta có:

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{Q-1}c_{ijk}\Delta K_i U_j-P_k=0 \tag{1.108}$$

Giải phương trình (1.108) thu được tương ứng chuyển vị U_j với *j = 0,1,2,...,Q-1*. Kỳ vọng toán của véc tơ chuyển vị nút *U* và ma trận hiệp phương sai được xác định như (1.109) và (1.110).

$$\mathbb{E}\left[U\right]=U_0 \tag{1.109}$$

$$Cov\left[U,U\right]=\sum_{j=1}^{Q-1}\mathbb{E}\left[\Psi_j^2\right]U_jU_j^T \tag{1.110}$$

Ghanem và Spanos [49], [53] sử dụng SFEM tiếp cận phổ kết hợp với rời rạc trường ngẫu nhiên mở rộng chuỗi nhiễu động phân tích dầm công-xôn có mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên một chiều chịu tác dụng của tải trọng tất định ở đầu tự do và kết cấu tấm hình vuông liên kết ngàm ở một biên tải trọng tác dụng tương ứng với bài toán phẳng. Tấm có mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên hai chiều. Ghanem và Brzakala [48] sử dụng SFEM tiếp cận phổ để phân tích nền đất hai lớp có mặt phân cách biến thiên ngẫu nhiên trong không gian. Waubke và cộng sự [125] đã kết hợp khai triển K-L với phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích sự lan truyền sóng trong môi trường phân lớp có mô đun trượt ngẫu nhiên với hàm hiệp phương sai tổng quát, đồng thời sử dụng phép lặp dạng Neumann nhằm giảm quy mô hệ phương trình cần giải. Ghanem [47] giải quyết bài toán dẫn nhiệt trong trường hợp độ dẫn nhiệt và nhiệt dung đều được biểu diễn toán học như các trường ngẫu nhiên Gaussian hoặc logarit chuẩn. Chen và Guedes Soares [27] đã phát triển SFEM dạng phổ cho bài toán tấm composite sử dụng chuỗi K-L.

1.5. TỔNG QUAN VỀ CÁC NGHIÊN CỨU CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG CỦA LUẬN ÁN

Ứng xử của kết cấu được mô tả bằng các phương trình toán học cùng điều kiện biên và điều kiện ban đầu. Các quan hệ giữa tải trọng, nội lực, ứng suất và biến dạng là cơ sở của phân tích tất định [132]. FEM là một phương pháp số phổ biến để giải các bài toán có hình học, vật liệu và điều kiện làm việc phức tạp. Tuy nhiên, lời giải tất định tại giá trị trung bình của đầu vào chưa phản ánh độ phân tán do các nguồn bất định. Các nguồn này

có thể liên quan đến sai số và bất định trong đo lường [64], tải trọng, tác động và tham số mô hình [104]. Việc lan truyền bất định có thể được phân tích bằng các phương pháp xác suất, trong đó có MCS [65], hoặc các tiếp cận phi xác suất [81], tùy theo dạng thông tin đầu vào và mục tiêu phân tích.

1.5.1. Tổng quan ứng dụng của phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên trong các lĩnh vực khoa học

SFEM kết hợp FEM với lý thuyết xác suất để định lượng ảnh hưởng của bất định đầu vào đến đáp ứng kết cấu. Phạm vi ứng dụng trải rộng từ khoa học vật liệu, cơ sinh học đến kỹ thuật xây dựng và địa kỹ thuật. Các mô hình tất định và kết quả thực nghiệm cũng cung cấp cơ sở xây dựng, hiệu chỉnh và kiểm chứng mô hình ngẫu nhiên.

Trong khoa học vật liệu, các hướng tiếp cận bao gồm mô hình đa thang mạng sợi ngẫu nhiên [60], MCS kết hợp FEM cho vật liệu nanocomposite polymer [111] và SFEM xác định hằng số đàn hồi của composite NCF [131]. Đồng nhất hóa vật liệu được triển khai bằng FEM thích nghi [56] hoặc phương pháp nhiễu khi hình học vi mô biến thiên ngẫu nhiên [102]. Ảnh hưởng của phân bố lỗ rỗng ngẫu nhiên còn được xét trong phân tích suy giảm sóng siêu âm của composite [133]. Đối với vật liệu tổ ong, các khảo sát tập trung vào biến thiên tính chất đàn hồi, chiều dày vách và mất ổn định [22], cũng như bất định hình học vi mô của lõi bọt [43]. Với vật liệu xốp, các vấn đề được xem xét gồm ứng xử nén [110], mô hình ngẫu nhiên đa thang [46], mô hình hình học Voronoi ba chiều [109] và đặc trưng hóa vi cấu trúc từ dữ liệu ảnh [90]. Đối với gỗ, dữ liệu thực nghiệm và mô hình ngẫu nhiên được sử dụng để đánh giá khả năng chịu kéo của dăm gỗ thông [67], [68].

Trong cơ sinh học, phân tích xác suất đã được tổng quan trong lĩnh vực chỉnh hình [75] và ứng dụng để đánh giá ảnh hưởng của hình học cột sống thắt lưng bằng FEM xác suất [86], bên cạnh các cơ sở về cơ học cột sống [74]. Các đối tượng khác gồm xương sọ linh trưởng được khảo sát bằng thực nghiệm hoặc FEM [100], [114], [124] chi dưới sau thay khớp gối [21] và tiếp xúc tại mối nối đầu cổ của khớp háng nhân tạo [38]. Những kết quả về tính không đồng nhất và cơ chế tiêu tán năng lượng của xương bổ sung cơ sở cho việc mô hình hóa vật liệu sinh học [39], [118].

Trong kỹ thuật xây dựng và địa kỹ thuật, trường ngẫu nhiên kết hợp FEM được sử dụng để xác định đặc trưng đàn hồi hiệu dụng của vật liệu chứa lỗ rỗng [54], [92]; SFEM theo phương pháp nhiễu được áp dụng cho dòng chảy nước ngầm [130]. Bên cạnh cơ sở lý thuyết ổn định [23] và phân tích ảnh hưởng của khuyết tật ban đầu đến sụp đổ cấu kiện thành mỏng [29], các mô hình ngẫu nhiên được phát triển cho ống thép có khuyết tật hình

học [122], bể thép ngầm [70] và kết cấu vỏ [28], [93]. Trong phân tích mỏi, dữ liệu được kết hợp với FEM xác suất để đánh giá độ tin cậy của chi tiết cầu thép [57].

1.5.2. Tình hình nghiên cứu ngoài nước

1.5.2.1. Tổng quan các nghiên cứu phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm

Trong phân tích tĩnh ngẫu nhiên của dầm, Vanmarcke và Grigoriu [121] sử dụng trung bình cục bộ để xác định thống kê bậc hai của chuyển vị khi tính chất vật liệu biến thiên ngẫu nhiên dọc trục. Deodatis [32] xây dựng ma trận độ cứng bằng tích phân trọng số; Deodatis và Shinozuka [35] kết hợp biểu diễn này với khai triển Taylor bậc nhất để xác định độ biến thiên đáp ứng và đánh giá độ tin cậy. Takada [120] phát triển tích phân trọng số cho cả ma trận độ cứng và lực nút tương đương. Hướng tiếp cận này được mở rộng sang bài toán ứng suất phẳng, biến dạng phẳng [36] và hệ có trường vật liệu nhiều chiều [119]. Chakraborty và Bhattacharyya [25] phát triển SFEM cho trường ngẫu nhiên ba chiều bằng trung bình cục bộ, kết hợp khai triển Neumann và MCS.

Đối với việc xây dựng phần tử và lời giải tham chiếu, Friedman và Kosmatka [44] thiết lập ma trận độ cứng chính xác cho dầm có chiều cao thay đổi trong bài toán tất định. Adhikari và Mukherjee [16] sử dụng phương pháp Castigliano để xây dựng ma trận độ cứng phần tử chính xác khi độ cứng uốn hoặc độ mềm biến thiên ngẫu nhiên dọc trục. Elishakoff và cộng sự [40] đưa ra lời giải chính xác cho các lớp bài toán dầm chịu tải ngẫu nhiên, còn Ren và cộng sự [99] thiết lập FEM từ nguyên lý biến phân trực tiếp đối với hàm kỳ vọng và hiệp phương sai chuyển vị. Những kết quả này cung cấp cơ sở xây dựng phần tử và kiểm chứng phương pháp gần đúng. Tuy nhiên, cần phân biệt tính chính xác của ma trận phần tử với tính chính xác của thống kê đáp ứng; đồng thời, mô hình tất định trong [44] và trường độ cứng dọc trục trong [16] chưa trực tiếp mô tả riêng biến thiên vật liệu theo các phương trên tiết diện.

Theo hướng ứng dụng, Shariyat và Rajabi Ghahnavieh [105] phân tích độ tin cậy của dầm có cả vật liệu và tải trọng ngẫu nhiên. Wu và cộng sự phát triển phương pháp cập nhật mô hình từ dữ liệu tĩnh có sai số [126] và nhận dạng hư hỏng bằng thuật toán phân tích đồng luân, có xét bất định đo lường và mô hình [127]. Cortés và cộng sự [30] xác định các đặc trưng xác suất của đáp ứng dầm công-xôn với mô đun đàn hồi, mô men quán tính là các biến ngẫu nhiên và tải trọng là quá trình tương quan delta. Các công bố này mở rộng mục tiêu từ dự báo đáp ứng sang đánh giá độ tin cậy; tuy nhiên, phạm vi mô hình đầu vào và đại lượng cần xác định khác nhau, nên kết quả phải được đối chiếu theo các giả thiết tương ứng.

1.5.2.2. Tổng quan các nghiên cứu phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm

Trong phân tích dao động ngẫu nhiên, T.-P. Chang và H.-C. Chang [26] sử dụng FEM kết hợp phương pháp nhiễu để phân tích đáp ứng động của dầm có tiết diện thay đổi dọc trục và mô đun đàn hồi ngẫu nhiên. Các đại lượng được xác định gồm kỳ vọng, phương sai và hàm tự tương quan của độ võng kết quả được đối chiếu với MCS. Hosseini và Khadem [63] sử dụng nhiễu bậc hai để phân tích dao động tự do của dầm quay có bất định về vật liệu, hình học và tốc độ quay; đồng thời khảo sát ảnh hưởng của phương pháp rời rạc trường và chiều dài tương quan. N.T. Nhung và cộng sự [83] phân tích trị riêng dao động của dầm có chiều cao thay đổi bằng nhiễu bậc nhất và đối chiếu với MCS sử dụng SRM. Các kết quả này cung cấp cơ sở đánh giá ảnh hưởng của bất định đầu vào, nhưng độ chính xác của phép xấp xỉ cần được kiểm chứng trong từng cấu hình khảo sát.

Theo hướng phân tích trong miền tần số, Adhikari và Manohar [15] sử dụng độ cứng động ngẫu nhiên kết hợp biến đổi Fourier nhanh để xác định đáp ứng quá độ. Gupta và Manohar [58] phát triển phương pháp độ cứng động cho hệ gồm các dầm Timoshenko cong hoặc thẳng có tính chất biến thiên ngẫu nhiên. Ostoja-Starzewski và Woods [91] xây dựng phần tử phổ trong miền tần số cho thanh và dầm có các đặc trưng vật liệu, hình học là trường ngẫu nhiên. Adhikari [14] phát triển phương pháp phổ kép, kết hợp khai triển K-L của trường ngẫu nhiên với phần tử phổ động lực học. Các tiếp cận này mở rộng khả năng phân tích động lực học.

Đối với hệ tương tác, N.P. Cuong và cộng sự [82] phân tích dao động tự do của dầm trên nền đàn hồi có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên bằng FEM kết hợp MCS và biểu diễn phổ. T.D. Hien và cộng sự [117] khảo sát hệ xe–dầm–nền đàn hồi với các tham số xe và trường tính chất vật liệu của dầm, nền ngẫu nhiên. Những công bố này mở rộng phạm vi từ cấu kiện riêng lẻ sang hệ tương tác.

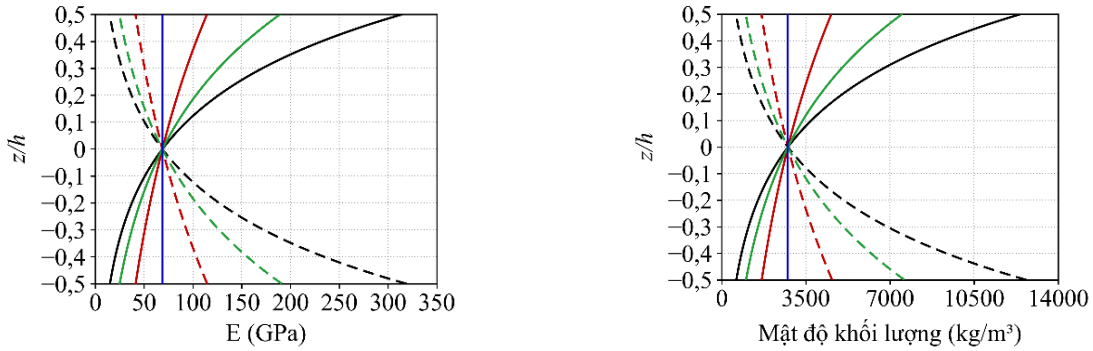
Trong phân tích ổn định, Zhang và Ellingwood [136] sử dụng khai triển trường trực giao và nhiễu bậc hai để xác định đặc trưng thống kê của tải mất ổn định khi tính chất vật liệu bất định. D.T. Hang và cộng sự [37] nghiên cứu cột mặt cắt ngang thay đổi có mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên một chiều bằng rời rạc điểm, nhiễu bậc nhất và đối sánh với SRM–MCS. Các hướng liên quan còn xét cột thép có độ cong ban đầu ngẫu nhiên và tương tác nén–uốn–xoắn [69], hoặc cột Leipholz chịu tải không bảo toàn [18]. Tích phân trọng số cũng được T.D. Hien [116] áp dụng cho chuyển vị dọc trục tĩnh của thanh có tiết diện thay đổi, cung cấp cơ sở phương pháp cho việc xây dựng phần tử ngẫu nhiên.

Đối với vật liệu composite, Ganesan và Kowda [45] phân tích thống kê tải mất ổn định của dầm cột có tính chất vật liệu và hình học ngẫu nhiên. Sasikumar và cộng sự [103] mô hình hóa bất đồng nhất trong từng lớp bằng trường phi Gaussian, sử dụng khai triển tuyến tính tối ưu và MCS để đánh giá xác suất hỏng. N.X. Hoang và cộng sự [62] kết hợp SRM và MCS với phân tích đẳng hình học để khảo sát mất ổn định của dầm và tấm composite lớp. Những kết quả này mở rộng mô hình vật liệu và phương pháp phân tích, song hiệu quả và độ chính xác cần được đánh giá theo loại cấu kiện, mô hình trường và đại lượng đáp ứng cụ thể.

Trong phân tích phi tuyến, Ly và cộng sự [79] lượng hóa bất định của tải mất ổn định cột chịu nén bằng ma trận đàn hồi ngẫu nhiên xác định dương, kết hợp FEM, Newton Raphson và MCS. Yurdakul và cộng sự [134] sử dụng FEM phi tuyến cùng lấy mẫu Latin Hypercube có xét tương quan giữa các biến vật liệu để phân tích độ nhạy của nút dầm cột bê tông cốt thép. Ibrahim và Makhloof [66] kết hợp trường ngẫu nhiên và phương pháp tiến hóa mật độ xác suất để đánh giá đáp ứng, độ tin cậy của cột và tường bê tông cốt thép chịu tải chu kỳ.

1.5.2.3. Tổng quan các nghiên cứu phân tích ngẫu nhiên dầm phân lớp chức năng (FGM)

Vật liệu biến thiên chức năng (FGM) có thành phần hoặc vi cấu trúc thay đổi theo vị trí, tạo ra sự biến thiên liên tục của các tính chất vật liệu. Theo Koizumi [73] khái niệm FGM được đề xuất năm 1984 tại Nhật Bản nhằm phát triển vật liệu chịu chênh lệch nhiệt độ lớn. Trong mô hình dầm, mô đun đàn hồi và khối lượng riêng thường được biểu diễn bằng các quy luật biến thiên cho trước. Hình 1.1 minh họa trường hợp E và ρ thay đổi theo hàm mũ dọc chiều cao tiết diện.



Hình 1.1. E và ρ của dầm FGM

Về mô hình cơ học, các công bố đã xem xét uốn phi tuyến [31], uốn và mất ổn định của dầm FGM có lỗ rỗng [61], uốn tĩnh của dầm FGM hai lớp quay có liên kết cắt trên nền đàn hồi không hoàn hảo [76], ứng xử đàn dẻo [94] và ứng xử dưới tải nhiệt [123]. Zhang

và cộng sự [137] phát triển phương pháp bán giải tích cho dầm công-xôn FGM biến thiên theo hai phương dưới tải tĩnh tùy ý.

Khi xét bất định vật liệu, Noh [88] phân tích dầm FGM có tiết diện thay đổi và mô đun đàn hồi ngẫu nhiên dọc trục, xác định hai mô men đầu của chuyển vị và kiểm chứng bằng MCS sử dụng biểu diễn phổ trường ngẫu nhiên. N.V. Thuan và Noh [84] khảo sát dao động dầm FGM có cả mô đun đàn hồi và khối lượng riêng là các quá trình ngẫu nhiên một chiều, có xét tương quan giữa chúng, bằng FEM kết hợp MCS tạo mẫu bằng phổ. N.V. Thuan và T.D. Hien [85] sử dụng SFEM nhiễu bậc nhất cho dao động tự do của dầm FGM có mô đun đàn hồi bất định; kết quả phù hợp với MCS trong các trường hợp khảo sát. Những công bố này làm rõ ảnh hưởng của bất định vật liệu.

Theo tiếp cận phi xác suất, P.H. Anh và cộng sự [95] kết hợp tối ưu hóa với xấp xỉ Taylor bậc nhất để phân tích bất định mờ của tần số riêng, dạng dao động và hàm đáp ứng tần số của dầm FGM. Trong phân tích tĩnh ngẫu nhiên, Amir và cộng sự [17] kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với nhiễu bậc nhất để khảo sát dầm cong FGM có lỗ rỗng và đối chiếu bằng MCS. Công bố này tập trung vào bất định vật liệu; biến thiên ngẫu nhiên của hình học và điều kiện biên được đề xuất như những hướng mở rộng.

Trong các mô hình có thành phần ngẫu nhiên một chiều, biến thiên FGM trên tiết diện vẫn tuân theo quy luật cho trước, chưa mô tả riêng cấu trúc tương quan ngẫu nhiên theo các phương trên tiết diện. Vì vậy, việc lượng hóa ảnh hưởng của số chiều và chiều dài tương quan theo từng phương đến thống kê đáp ứng, đồng thời kiểm chứng phạm vi chính xác của các phép xấp xỉ, là vấn đề cần tiếp tục làm rõ.

1.5.3. Tình hình nghiên cứu trong nước

Tại Việt Nam, xu hướng nghiên cứu phân tích kết cấu dưới tác động của các yếu tố ngẫu nhiên và bất định đang phát triển mạnh mẽ, chuyển dịch từ các bài toán tất định truyền thống sang các mô hình xác suất nhằm phản ánh sát thực tế điều kiện làm việc của kết cấu công trình. Trong việc giải quyết bài toán phi tuyến và đánh giá an toàn, phương pháp MCS đã khẳng định được vai trò chủ đạo nhờ khả năng xử lý độ chính xác. Các nghiên cứu nền tảng của Lê Anh Tuấn [13] về đáp ứng động phi tuyến của công trình biển hay Bùi Đức Năng [8] về hệ thanh chịu tải trọng phức tạp đều sử dụng MCS làm công cụ phân tích, chỉ ra những hạn chế của kỹ thuật tuyến tính hóa khi đối mặt với các hệ có tính phi tuyến mạnh. Kế thừa và phát triển hướng đi này, Vũ Trọng Huy [5] đã đề xuất biến thể cải tiến của MCS để phân tích kết cấu nhà dân dụng cao tầng chịu tác dụng tải động đất theo tiêu chuẩn TCVN, trong khi Nguyễn Ngọc Lâm [6] ứng dụng kỹ thuật này để làm sáng tỏ các đặc trưng thống kê của lực tới hạn trong cột có liên kết đàn hồi ngẫu nhiên.

Song song với các phương pháp mô phỏng đòi hỏi chi phí tính toán lớn, nhu cầu phát triển các công cụ giải tích gần đúng và lý thuyết phi xác suất cũng thu hút sự quan tâm nhằm tối ưu hóa quy trình thiết kế. Chu Thanh Bình [1] đã xây dựng thành công phương pháp gần đúng để tính toán độ tin cậy cho các cấu kiện cơ bản như dầm, cho phép xử lý linh hoạt các tham số hình học và tính chất vật liệu ngẫu nhiên mà không phải mô phỏng số lượng lớn các phép thử. Ở một cách tiếp cận khác, khi thông tin thống kê về đầu vào không đầy đủ, Lê Công Duy [2] đã vận dụng lý thuyết tập mờ để mô hình hóa các đặc trưng độ cản và tải trọng, mở ra hướng đánh giá an toàn cho khung nhiều tầng dựa trên độ tin cậy mờ thay vì xác suất cổ điển.

Bên cạnh việc phát triển phương pháp tính, các nghiên cứu trong nước cũng đi sâu vào phân tích đáp ứng của các kết cấu chịu khuyết tật và các giải pháp kiểm soát dao động trong môi trường ngẫu nhiên. Dương Thế Hùng [3], [4] đã tập trung khảo sát ảnh hưởng của các vết nứt, suy giảm độ cứng cục bộ và liên kết nửa cứng đến trạng thái ứng suất - biến dạng, làm rõ mối liên hệ giữa vị trí khuyết tật và độ nhạy của đáp ứng kết cấu. Liên quan đến vấn đề ổn định hệ dàn, Đoàn Như Sơn và các cộng sự [9] cũng đã lượng hóa vai trò của tính bất định trong các thanh giằng đối với độ tin cậy tổng thể. Đặc biệt, trong lĩnh vực điều khiển kết cấu, Nguyễn Chí Thọ và các cộng sự [11], [10] đã phát triển khung lý thuyết cho hệ dầm và khung không gian lắp đặt thiết bị giảm chấn khối lượng điều chỉnh chịu kích thích ồn trắng, kết hợp với trí tuệ nhân tạo để tối ưu hóa các tham số thiết kế nhằm giảm thiểu dao động một cách hiệu quả nhất.

Đối với lĩnh vực công trình giao thông, bài toán tương tác động lực học giữa cầu và phương tiện dưới tác dụng của tải trọng di động ngẫu nhiên đã đạt được những bước tiến quan trọng nhờ sự kết hợp chặt chẽ giữa mô hình số và thực nghiệm. Vũ Văn Toản [12] đã xây dựng mô hình tương tác cầu - xe có xét đến độ mấp mô ngẫu nhiên của mặt đường và các đặc trưng cản thực tế đo đạc từ hiện trường, cung cấp cơ sở tin cậy để đánh giá năng lực khai thác của cầu. Gần đây, Nguyễn Thị Kim Loan và các cộng sự [7] đã áp dụng phương pháp tiến hóa mật độ xác suất kết hợp với dữ liệu thực đo, giải quyết hiệu quả bài toán xác định đáp ứng cầu dầm khi các tham số về tải trọng xe và vận tốc di chuyển đều mang tính bất định, khắc phục được những hạn chế của các mô hình tải trọng tất định.

Các công trình nghiên cứu trong nước đã bắt kịp xu hướng hiện đại trong việc phân tích ngẫu nhiên cũng như đánh giá độ tin cậy của kết cấu, với phương pháp chủ đạo là mô phỏng MCS. Tuy nhiên, MCS dẫn đến chi phí tính toán lớn, đồng thời các mô hình vật liệu hiện có phần lớn chỉ dừng lại ở biến ngẫu nhiên hoặc trường ngẫu nhiên một chiều. Các nghiên cứu nhằm mục đích phát triển SFEM để giải quyết bài toán trường ngẫu nhiên không gian đa chiều vẫn còn rất hạn chế.

1.5.4. Đánh giá tổng quan và vấn đề nghiên cứu

Tổng quan các công bố cho thấy SFEM đã được phát triển để định lượng ảnh hưởng của bất định vật liệu, hình học, tải trọng và điều kiện biên đến đáp ứng kết cấu. Đối với dầm, cột, các hướng phát triển có thể tổng hợp theo ba hướng nghiên cứu: hoàn thiện mô hình cơ học và phương pháp giải; mở rộng mô hình kết cấu và các hệ tương tác; phát triển mô hình bất định và phương pháp biểu diễn trường vật liệu.

Về mô hình vật liệu, các phương pháp trung bình cục bộ, tích phân trọng số và khai triển trường đã cung cấp nền tảng cho phân tích ngẫu nhiên. Vì vậy, việc xác định vấn đề nghiên cứu cần dựa trên mô hình cấu kiện, cách thiết lập các đại lượng ngẫu nhiên và mục tiêu khảo sát cụ thể. Đồng thời, cần phân biệt số chiều của trường ngẫu nhiên với số chiều của mô hình kết cấu.

Đối với dầm, cột có vật liệu biến thiên ngẫu nhiên trên tiết diện và chiều dài, vấn đề cần làm rõ là mối liên hệ giữa cấu trúc tương quan không gian, các đại lượng độ cứng và khối lượng tương đương, cùng đặc trưng thống kê của đáp ứng. Mô hình trường chỉ biến thiên dọc trục không mô tả riêng sự thay đổi tương quan theo các phương trên tiết diện. Do đó, ảnh hưởng của việc giản lược số chiều cần được đánh giá định lượng trong các cấu hình và điều kiện tương quan cụ thể. Trên cơ sở đó, luận án tập trung vào ba vấn đề:

- ✓ **Thiết lập mô hình SFEM cho trường vật liệu hai chiều và ba chiều:** xây dựng các biểu thức tích phân trọng số của thành phần ngẫu nhiên trong ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và các hiệp phương sai tương ứng; kết hợp nhiễu bậc nhất để xác định thống kê xấp xỉ của chuyển vị, trị riêng dao động và tải tới hạn.
- ✓ **Định lượng ảnh hưởng của số chiều và cấu trúc tương quan không gian:** khảo sát vai trò của chiều dài tương quan dọc trục và theo các phương trên tiết diện đối với độ phân tán đáp ứng; làm rõ điều kiện và hệ quả của việc giản lược mô hình trường vật liệu.
- ✓ **Làm rõ ảnh hưởng của tương quan chéo giữa mô đun đàn hồi và khối lượng riêng:** xác định đóng góp của biến thiên độ cứng, khối lượng và tương quan giữa chúng vào phương sai trị riêng dao động uốn, cùng điều kiện xuất hiện xu hướng bù trừ bất định.

Luận án triển khai các nội dung trên với trường vật liệu Gaussian dừng; bài toán ổn định được giới hạn ở mất ổn định uốn phẳng Euler trong mặt phẳng khảo sát. Độ chính xác của các đặc trưng thống kê xấp xỉ được đánh giá thông qua khảo sát hội tụ, giới hạn tất định, đối sánh với kết quả đã công bố và MCS sử dụng SRM. Các kết quả cung cấp cơ sở lựa chọn mức độ mô tả trường vật liệu phù hợp với mục tiêu trong phạm vi khảo sát.

1.6. KẾT LUẬN CHƯƠNG I

Trên cơ sở nghiên cứu tổng quan và phân tích tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước, các kết luận nền tảng và định hướng nghiên cứu chính của luận án được đúc kết:

Về cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận:

- ✓ **Biểu diễn trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên:** Trường Gaussian dừng được lựa chọn nhằm xây dựng mô hình tham chiếu thuận tiện cho phân tích; mức độ phù hợp với vật liệu thực cần được đánh giá bằng dữ liệu thực nghiệm.
- ✓ **Kỹ thuật rời rạc hóa trường ngẫu nhiên:** Trong các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên, kỹ thuật tích phân trọng số thể hiện ưu điểm vượt trội về độ ổn định số học, khả năng bảo toàn đặc trưng thống kê của trường. Kỹ thuật này đặc biệt tương thích và hiệu quả khi tích hợp vào khuôn khổ SFEM.
- ✓ **Phương pháp lan truyền và phân tích ngẫu nhiên:** Kỹ thuật tích phân trọng số kết hợp với phương pháp nhiễu loạn là hướng tiếp cận hiệu quả để xác định đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu; trong khi đó, phương pháp mô phỏng MCS sẽ đóng vai trò để kiểm chứng và xác thực độ tin cậy của mô hình đề xuất.

Về khoảng trống nghiên cứu: Tổng quan tài liệu chỉ ra rằng, hầu hết các công bố khoa học hiện nay về ứng xử của dầm, cột chịu ảnh hưởng của tính bất định của tính chất vật liệu mới chỉ dừng lại ở mô hình trường ngẫu nhiên một chiều (biến thiên dọc trục). Các nghiên cứu xét đến sự biến thiên đồng thời của tính chất vật liệu trong không gian đa chiều (ngẫu nhiên 2D, 3D) còn hạn chế. Việc bỏ qua tính ngẫu nhiên không gian đa chiều này dẫn đến việc đánh giá thiếu toàn diện về hiệu ứng trung bình hóa không gian, và chưa phản ánh sát với bản chất vật lý của sự không đồng nhất tính chất vật liệu trong thực tế.

Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu của luận án: Xuất phát từ các vấn đề đã được phân tích và khoảng trống tri thức vừa được chỉ ra, đề tài luận án "**PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CƠ HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT TỚI PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN TÍNH CHẤT VẬT LIỆU**" đã được xác định với các nhiệm vụ cốt lõi sau:

- ✓ **Hệ thống hóa nền tảng lý thuyết:** Tổng hợp lý thuyết tính toán ngẫu nhiên và các kỹ thuật biểu diễn trường ngẫu nhiên trong khuôn khổ SFEM.
- ✓ **Phát triển SFEM:** Xây dựng các ma trận ngẫu nhiên của phần tử dầm, cột dựa trên kỹ thuật tích phân trọng số. Kết hợp với phương pháp nhiễu loạn để thiết lập chuỗi xấp xỉ bậc nhất của đáp ứng ngẫu nhiên, từ đó thiết lập các đại lượng thống kê bậc thấp của đáp ứng dầm, cột (kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn, hệ số biến thiên).

- ✓ **Giải quyết các bài toán cơ bản của cơ học:** Ứng dụng mô hình SFEM đề xuất để giải quyết trọn vẹn 03 bài toán cơ bản của dầm, cột có tính chất vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian:
  - Phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm (xác định đặc trưng thống kê chuyển vị của dầm).
  - Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên kết cấu dầm (xác định đặc trưng thống kê của giá trị riêng).
  - Phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên kết cấu cột chịu nén đúng tâm (xác định đặc trưng thống kê của lực tới hạn).
- ✓ **Khảo sát ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên tính chất vật liệu đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột:** Đánh giá định lượng ảnh hưởng của các đặc trưng trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu (chiều dài tương quan, hệ số biến thiên, tương quan chéo giữa các trường tính chất vật liệu) đến độ phân tán của đáp ứng ngẫu nhiên của dầm và cột, qua đó làm sáng tỏ vai trò chi phối của tính ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đối với ứng xử cơ học của kết cấu.

CHƯƠNG II: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM PHẲNG CHỊU UỐN CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

2.1. MÔ HÌNH BÀI TOÁN

Xét dầm Euler-Bernoulli thẳng có chiều dài nhịp *L*, mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều rộng là *b* và chiều cao dầm là *h*, có mô đun đàn hồi *E* và mật độ khối lượng ρ. Trong trường hợp $E = E_0$ và $\rho = \rho_0$ là tất định, phương trình vi phân chuyển động tổng quát như (2.1) với *A* và *I* lần lượt là diện tích và mô men quán tính của mặt cắt ngang, *w(x,t)* là độ võng theo phương đứng của dầm, *q(x,t)* tải trọng phân bố:

$$E_0 I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho_0 A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{2.1}$$

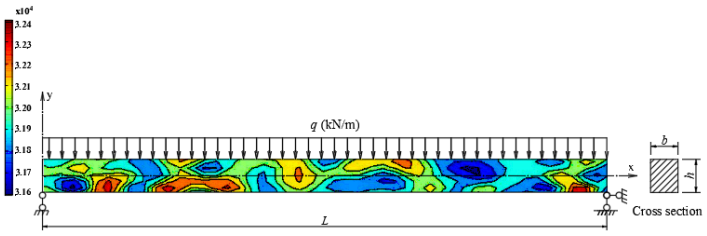
Xét trường hợp bài toán tĩnh phương trình vi phân cân bằng của dầm được viết lại:

$$E_0 I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \tag{2.2}$$

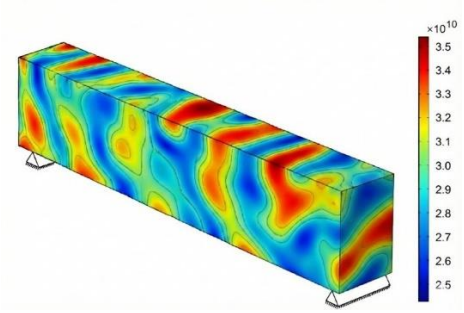
Đối với bài toán dao động tự do tương ứng *q(x,t) = 0*, tìm nghiệm dưới dạng tách biến $w(x,t) = \Phi(x) e^{-i\omega t}$ thì phương trình vi phân chuyển động của dầm trở thành bài toán trị riêng với $\Phi(x)$ là dạng dao động riêng và ω là tần số góc dao động riêng.

$$E_0 I \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_0 A \Phi(x) = 0 \tag{2.3}$$

Đối với điều kiện biên cụ thể, bài toán tĩnh thu được độ võng của dầm là nghiệm của (2.2) là duy nhất. Tương tự, giải bài toán trị riêng (2.3) thu được tập hợp các tần số dao động riêng và giá trị riêng hoàn toàn xác định. Do quá trình chế tạo vật liệu, cấu trúc vi mô của vật liệu, hoặc quá trình lão hóa dẫn đến các tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Hình 2.1 thể hiện trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều, trong khi Hình 2.2 mô tả dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều.



Hình 2.1. Dầm có *E* ngẫu nhiên hai chiều



Hình 2.2. Dầm có E ngẫu nhiên ba chiều

Trong nghiên cứu này, mô đun đàn hồi E và mật độ khối lượng ρ của dầm được giả định là trường ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (2.4) và (2.5), ngẫu nhiên ba chiều như (2.6) và (2.7):

$$E(\mathbf{x},\theta) = E(x,y,\theta) = E_0\left[1+ f(x,y,\theta)\right] \tag{2.4}$$

$$\rho(\mathbf{x},\theta) = \rho(x,y,\theta) = \rho_0\left[1+ g(x,y,\theta)\right] \tag{2.5}$$

$$E(\mathbf{x},\theta) = E(x,y,z,\theta) = E_0\left[1+ f(x,y,z,\theta)\right] \tag{2.6}$$

$$\rho(\mathbf{x},\theta) = \rho(x,y,z,\theta) = \rho_0\left[1+ g(x,y,z,\theta)\right] \tag{2.7}$$

Với E_0 và ρ_0 lần lượt là giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng. $f(x,y,\theta)$ và $g(x,y,\theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian hai chiều, dừng, có giá trị kỳ vọng bằng không. $f(x,y,z,\theta)$ và $g(x,y,z,\theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian ba chiều, dừng có giá trị kỳ vọng bằng không. Do phân phối Gaussian có miền giá trị không bị chặn, điều kiện $E(\mathbf{x},\theta)$ và $\rho(\mathbf{x},\theta)$ dương không được bảo đảm tuyệt đối về mặt xác suất đối với mọi hiện thực của trường. Vì vậy, mô hình Gaussian được sử dụng như một xấp xỉ kỹ thuật trong phạm vi biến thiên nhỏ và vừa của tính chất vật liệu được xét trong luận án. Ký hiệu θ biểu thị rằng hai trường ngẫu nhiên này được xác định trên cùng một không gian xác suất và tương ứng với cùng một hiện thực vật lý của kết cấu. Ký hiệu $\mathbf{x} = (x, y)$ đối với không gian hai chiều và $\mathbf{x} = (x, y, z)$ đối với không gian ba chiều.

Nhằm đi sâu khảo sát ứng xử động lực học tuyến tính của hệ bảo toàn, các thành phần lực cản không được kể đến trong phương trình cân bằng động. Phương trình vi phân chuyển động của dầm trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên không gian có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mathcal{D}(x,\theta)\frac{\partial^2 w(x,t,\theta)}{\partial x^2}\right] + \mathcal{M}(x,\theta)\frac{\partial^2 w(x,t,\theta)}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{2.8}$$

Với $\mathcal{D}(x,\theta)$ là độ cứng uốn hiệu dụng được xác định như (2.9), $\mathcal{M}(x,\theta)$ khối lượng hiệu dụng trên một đơn vị chiều dài được xác định như (2.10).

$$\mathcal{D}(x,\theta)=\int_A y^2 E(\mathbf{x},\theta)dydz \tag{2.9}$$

$$\mathcal{M}(x,\theta)=\int_A \rho(\mathbf{x},\theta)\,dydz \tag{2.10}$$

Phương trình vi phân chủ đạo mô tả độ võng tĩnh ngẫu nhiên $w(x,\theta)$ như (2.11):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathcal{D}(x,\theta)\frac{\partial^2 w(x,\theta)}{\partial x^2}\right]=q(x) \tag{2.11}$$

Trong bài toán dao động tự do, tìm nghiệm dưới dạng tách biến $w(x,t,\theta)=\Phi(x,\theta)e^{-i\omega(\theta)t}$ thay vào phương trình vi phân chuyển động tổng quát thu được bài toán trị riêng ngẫu nhiên như phương trình sau:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathcal{D}(x,\theta)\frac{d^2\Phi(x,\theta)}{dx^2}\right]-\left[\omega(\theta)\right]^2\mathcal{M}(x,\theta)\Phi(x,\theta)=0 \tag{2.12}$$

Việc tìm lời giải giải tích chính xác cho các phương trình vi phân (2.12) gặp phải những thách thức toán học lớn do các hệ số của phương trình là những trường ngẫu nhiên không gian có số bậc tự do vô hạn. Để giải quyết vấn đề này, luận án phát triển SFEM dựa trên kỹ thuật tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu, kết hợp phương pháp nhiễu loạn bậc nhất để xác định xấp xỉ các đặc trưng thống kê của đáp ứng. Trong khuôn khổ của phương pháp nhiễu, luận án giả thiết độ biến động của vật liệu là vừa và nhỏ. Trên cơ sở đó, các đặc trưng hình học của tiết diện được coi là tất định. Đồng thời, các hiệu ứng xoắn ngẫu nhiên và uốn xoắn kết hợp phát sinh do sự bất đối xứng cục bộ của vật liệu được bỏ qua trong các xấp xỉ bậc thấp.

Trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, được lựa chọn để mô hình hóa sự biến thiên ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu do những ưu điểm vượt trội về mặt toán học và khả năng áp dụng thực tiễn. Trường Gaussian được xác định hoàn toàn bởi hàm kỳ vọng và hàm hiệp phương sai. Tính dừng theo không gian đảm bảo rằng các đặc trưng thống kê của trường không phụ thuộc vào vị trí tuyệt đối mà chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tương đối, phù hợp với giả định tính dừng về mặt thống kê ở quy mô vĩ mô của vật liệu. Điều này cho phép áp dụng hiệu quả các phương pháp biến đổi phổ, chẳng hạn như biến đổi Fourier và phương pháp biểu diễn phổ nhằm sinh mẫu trường ngẫu nhiên phục vụ phân tích số. Ngoài ra, trong thực tế, nhiều tính chất vật liệu có nguồn gốc từ các quá trình ngẫu nhiên vi mô và thường có xu hướng hội tụ về phân bố Gaussian theo định lý giới hạn trung tâm. Do đó, việc sử dụng trường ngẫu nhiên Gaussian dừng không chỉ bảo đảm tính khả thi trong mô phỏng mà còn phản ánh hợp lý đặc trưng ngẫu nhiên của vật liệu trong các bài toán cơ học kỹ thuật.

Để đơn giản trong biểu diễn toán học, không mất đi tính tổng quát ký hiệu θ trong các phương trình (2.4) - (2.7) được lược bỏ khi đó bản thân các ký hiệu E và ρ thể hiện tính ngẫu nhiên. Các phương trình được viết lại như sau:

$$E(\mathbf{x},\theta) = E(x,y) = E_0\left[1+ f(x,y)\right] \tag{2.13}$$

$$\rho(\mathbf{x},\theta) = \rho(x,y) = \rho_0\left[1+ g(x,y)\right] \tag{2.14}$$

$$E(\mathbf{x},\theta) = E(x,y,z) = E_0\left[1+ f(x,y,z)\right] \tag{2.15}$$

$$\rho(\mathbf{x},\theta) = \rho(x,y,z) = \rho_0\left[1+ g(x,y,z)\right] \tag{2.16}$$

Các đại lượng thống kê của trường tính chất vật liệu được thiết lập dựa vào định nghĩa và các đại lượng thống kê của trường *f(x,y)* và *f(x,y,z)*.

- ✓ Kỳ vọng toán của trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu:

$$\mathbb{E}\left[E(x,y)\right] = \mathbb{E}\left[E_0\left(1+ f(x,y)\right)\right] = E_0 \tag{2.17}$$

$$\mathbb{E}\left[E(x,y,z)\right] = \mathbb{E}\left[E_0\left(1+ f(x,y,z)\right)\right] = E_0 \tag{2.18}$$

$$\mathbb{E}\left[\rho(x,y)\right] = \mathbb{E}\left[\rho_0\left(1+ g(x,y)\right)\right] = \rho_0 \tag{2.19}$$

$$\mathbb{E}\left[\rho(x,y,z)\right] = \mathbb{E}\left[\rho_0\left(1+ g(x,y,z)\right)\right] = \rho_0 \tag{2.20}$$

- ✓ Mô-men bậc hai trung tâm của trường vật liệu ngẫu nhiên:

$$var\left[E(x,y)\right] = \mathbb{E}\left[\left(E(x,y)-E_0\right)^2\right] = E_0^2\sigma_f^2 \tag{2.21}$$

$$var\left[E(x,y,z)\right] = \mathbb{E}\left[\left(E(x,y,z)-E_0\right)^2\right] = E_0^2\sigma_f^2 \tag{2.22}$$

$$var\left[\rho(x,y)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\rho(x,y)-\rho_0\right)^2\right] = \rho_0^2\sigma_g^2 \tag{2.23}$$

$$var\left[\rho(x,y,z)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\rho(x,y,z)-\rho_0\right)^2\right] = \rho_0^2\sigma_g^2 \tag{2.24}$$

Với σ_f là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên *f(x,y)* và *f(x,y,z)*. σ_g là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên *g(x,y)* và *g(x,y,z)*. Hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên *f(x,y)* và *f(x,y,z)* được xác định như phương trình (2.25) và (2.26), của trường ngẫu nhiên *g(x,y)* và *g(x,y,z)* được xác định như phương trình (2.27) và (2.28) với d_x, d_y và d_z lần lượt là chiều dài tương quan theo các trục trong không gian. Hàm tương quan chéo giữa các trường ngẫu nhiên được xác định như (2.29) - (2.30) với γ là hệ số tương quan chéo của các trường.

$$R_{ff}(\xi_1,\xi_2) = \sigma_f^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x}-\frac{|\xi_2|}{d_y}\right] \tag{2.25}$$

$$R_{ff}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \sigma_f^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x}-\frac{|\xi_2|}{d_y}-\frac{|\xi_3|}{d_z}\right] \tag{2.26}$$

$$R_{gg}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\sigma_g^2\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}\right] \tag{2.27}$$

$$R_{gg}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\sigma_g^2\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}-\frac{\left|\xi_3\right|}{d_z}\right] \tag{2.28}$$

$$R_{fg}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\gamma\sigma_f\sigma_g\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}\right] \tag{2.29}$$

$$R_{fg}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\gamma\sigma_f\sigma_g\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}-\frac{\left|\xi_3\right|}{d_z}\right] \tag{2.30}$$

2.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN BẰNG KỸ THUẬT TÍCH PHÂN TRỌNG SỐ BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN CỦA TÍNH CHẤT VẬT LIỆU

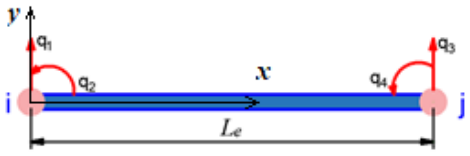
2.2.1. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Xét dầm mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao mặt cắt là *h*, chiều rộng mặt cắt là *b* và chiều dài nhịp là *L* như Hình 2.1. Mô đun đàn hồi của dầm thay đổi ngẫu nhiên dọc theo chiều dài và chiều cao dầm như phương trình (2.13) với E_0 là giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi, $f(x,y)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, hai chiều, có kỳ vọng bằng không. Theo FEM, kết cấu dầm được chia thành N_e phần tử. Khi đó *E* của phần tử thứ *e* được thiết lập như phương trình (2.31).

$$E_e\left(x,y\right)=E_0\left[1+f_e\left(x,y\right)\right] \tag{2.31}$$

Trong nghiên cứu này sử dụng phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do như Hình 2.3. Quan hệ giữa chuyển vị của phần tử và chuyển vị nút của phần tử được xác định như phương trình (2.32).

$$w_i^e=\left[N\right]\left\{q_i\right\}^e \tag{2.32}$$



Hình 2.3. Mô hình của phần tử kết cấu dầm

Trong phương trình (2.32), [*N*] là ma trận hàm dạng [78] được xác định như các công thức (2.33) - (2.34) với L_e là chiều dài của phần tử, $\left\{q_i\right\}^e$ là véc tơ chuyển vị nút của phần tử như phương trình (2.35).

$$[N]=[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \tag{2.33}$$

Với các hàm dạng được xác định như phương trình (2.34):

$$\begin{aligned} N_1 &= 1-3\frac{x^2}{L_e{}^2}+2\frac{x^3}{L_e{}^3}; N_2 = x\left(1-2\frac{x}{L_e}+\frac{x^2}{L_e{}^2}\right) \\ N_3 &= 3\frac{x^2}{L_e{}^2}-2\frac{x^3}{L_e{}^3}; N_4 = x\left(-\frac{x}{L_e}+\frac{x^2}{L_e{}^2}\right) \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\{q_i\}^e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \tag{2.35}$$

Thay phương trình (2.34) vào phương trình (2.33), ma trận hàm dạng của phần tử được viết lại như phương trình (2.36).

$$[N]=[r][\Lambda] \tag{2.36}$$

Trong phương trình (2.36), ma trận các hệ số $[\Lambda]$ và ma trận bao gồm các đơn thức $[r]$ được xác định như các phương trình (2.37) và (2.38).

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L_e^2} & -\frac{2}{L_e} & \frac{3}{L_e^2} & -\frac{1}{L_e} \\ \frac{2}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} & -\frac{2}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$[r]=\begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Trong khuôn khổ của FEM tuyến tính, $[K]_e$ được tính toán như phương trình (2.39) với $[B]$ là ma trận tính biến dạng và $[D]$ là ma trận tính chất vật liệu. Đối với phần tử dầm các ma trận này xác định như các phương trình (2.40) - (2.41).

$$[K]_e = \int_{V_e}[B]^T[D][B]dV_e \tag{2.39}$$

$$[B]=-y[N''] \tag{2.40}$$

$$[D]=E_e(x,y) \tag{2.41}$$

Thay các phương trình (2.40) - (2.41) vào phương trình (2.39) thu được (2.42):

$$[K]_e = \int_{V_e} y^2[N'']^T E_e(x,y)[N'']dV_e \tag{2.42}$$

Thay các công thức (2.31) và (2.36) vào phương trình (2.42) thu được phương trình sau:

$$[K]_e = \underbrace{[\Lambda]^T\left\{\int_{V_e} y^2 E_0[r'']^T[r'']dV_e\right\}[\Lambda]}_{[K_0]_e} + \underbrace{[\Lambda]^T\left\{\int_{V_e} y^2 f_e(x,y)E_0[r'']^T[r'']dV_e\right\}[\Lambda]}_{[\Delta K]_e} \tag{2.43}$$

Dựa vào phương trình (2.43) thấy rằng ma trận $[K]_e$ được phân tách thành hai thành phần: phần tất định $[K_0]_e$ được xác định như phương trình (2.44) và phần ngẫu nhiên $[\Delta K]_e$ được xác định như phương trình (2.45).

$$[K_0]_e = [\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 E_0 [r"]^T [r"] dV_e \right\} [\Lambda] \tag{2.44}$$

$$[\Delta K]_e = [\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 f_e(x,y) E_0 [r"]^T [r"] dV_e \right\} [\Lambda] \tag{2.45}$$

Để ý đến phương trình (2.38) đại lượng $[r"]^T [r"]$ xuất hiện trong (2.44) - (2.45) được xác định như (2.46).

$$[r"]^T [r"] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Thay phương trình (2.46) vào phương trình (2.44) thu được phần tất định của ma trận độ cứng của phần tử như phương trình (2.47).

$$[K_0]_e = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

Phần ngẫu nhiên của ma trận $[K]_e$ được xác định bằng cách thay các phương trình (2.37) và (2.46) vào phương trình (2.45) thu được phương trình (2.48). Với các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong (2.48) được tính toán như (2.49). A_e là diện tích hình chữ nhật được giới hạn bởi chiều dài của phần tử và chiều cao mặt cắt.

$$\begin{aligned} [\Delta K]_e = & \underbrace{E_0 b [\Lambda]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\Lambda] \Theta_1^e}_{[\Delta K_1]_e} \\ & \underbrace{+ E_0 b [\Lambda]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} [\Lambda] \Theta_2^e}_{[\Delta K_2]_e} + \underbrace{E_0 b [\Lambda]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} [\Lambda] \Theta_3^e}_{[\Delta K_3]_e} \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\Theta_i^e = \int_{A_e} x^{i-1} y^2 f_e(x,y) dA_e \quad ; \quad i = 1,2,3 \tag{2.49}$$

Để ý đến phương trình (2.37) các ma trận xuất hiện trong phương trình (2.48) được xác định như các phương trình (2.50) - (2.52):

$$\left[\Delta K_1\right]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6}\begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

$$\left[\Delta K_2\right]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6}\begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

$$\left[\Delta K_3\right]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6}\begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

$[K]_e$ có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên hai chiều được biểu diễn như (2.53) với Θ_i^e là các biến ngẫu nhiên được trung bình hóa từ trường ngẫu nhiên thông qua tích phân của trường ngẫu nhiên với các hàm của biến không gian *x,y* như phương trình (2.49).

$$\left[K\right]_e = \left[K_0\right]_e + \left[\Delta K_1\right]_e \Theta_1^e + \left[\Delta K_2\right]_e \Theta_2^e + \left[\Delta K_3\right]_e \Theta_3^e \tag{2.53}$$

Θ_i^e gọi là các biến ngẫu nhiên cơ bản của phần tử. Trong trường hợp trường ngẫu nhiên đầu vào mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên Gaussian thì các biến ngẫu nhiên cơ bản cũng là biến ngẫu nhiên Gaussian. Để ý đến phương trình (2.53) ma trận $[K]_e$ là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Bài toán bao gồm N_e phần tử thì tổng số lượng biến ngẫu nhiên của bài toán là $3 \times N_e$ biến ngẫu nhiên.

2.2.2. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều

Xét kết cấu dầm có chiều dài nhịp *L*, mặt cắt ngang hình chữ nhật có bề rộng là *b*, chiều cao là *h*. Dầm có *E* và ρ thay đổi ngẫu nhiên hai chiều dọc theo chiều dài của kết cấu dầm và chiều cao mặt cắt. Theo FEM ma trận khối lượng của phần tử được xác định như phương trình (2.54):

$$\left[M\right]_e = \int_{V_e} \rho \left[N\right]^T \left[N\right] dV_e \tag{2.54}$$

Dầm có E và ρ ngẫu nhiên hai chiều được biểu diễn như các phương trình (2.55), (2.56) với E_0 và ρ_0 là giá trị kỳ vọng của E và ρ, $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là các trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, hai chiều, có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$E(x,y) = E_0\left[1 + f(x,y)\right] \tag{2.55}$$

$$\rho(x,y) = \rho_0\left[1 + g(x,y)\right] \tag{2.56}$$

Theo FEM, kết cấu dầm được chia thành N_e phần tử, khi đó E và ρ thay đổi ngẫu nhiên hai chiều trong tọa độ của phần tử như các phương trình (2.57), (2.58).

$$E(x,y) = E_0\left[1 + f_e(x,y)\right] \tag{2.57}$$

$$\rho(x,y) = \rho_0\left[1 + g_e(x,y)\right] \tag{2.58}$$

Thay phương trình (2.58) vào phương trình (2.54) thu được phương trình (2.59).

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho_o\left[1 + g_e(x,y)\right][N]^T[N]dV_e \tag{2.59}$$

Để ý đến phương trình (2.36) phương trình (2.59) có thể được viết lại như sau:

$$[M]_e = \underbrace{[\Lambda]^T \int_{V_e} \rho_0 [r]^T [r] dV_e [\Lambda]}_{[M_0]_e} + \underbrace{[\Lambda]^T \int_{V_e} \rho_0 g_e(x,y)[r]^T [r] dV_e [\Lambda]}_{\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e \Psi_i^e} \tag{2.60}$$

Ma trận $[r]^T[r]$ xuất hiện trong phương trình (2.60) được xác định như phương trình (2.61)

$$[r]^T[r] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Thay phương trình (2.61) vào phương trình (2.60) thu được phần tất định của ma trận khối lượng phần tử như (2.62) và phần ngẫu nhiên của ma trận khối lượng phần tử như (2.63).

$$[M_0]_e = \rho_0 A \begin{bmatrix} \frac{13}{35}L_e & \frac{11}{210}L_e^2 & \frac{9}{70}L_e & -\frac{13}{420}L_e^2 \\ & \frac{1}{105}L_e^3 & \frac{13}{420}L_e^2 & -\frac{1}{140}L_e^3 \\ & & \frac{13}{35}L_e & -\frac{11}{210}L_e^2 \\ \text{sym.} & & & \frac{1}{105}L_e^3 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

$$\sum_{i=1}^{7}\left[\Delta M_i\right]_e \Psi_i^e = \underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_1\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_1^e + \underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_2\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_2^e$$

$$+\underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_3\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_3^e + \underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_4\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_4^e + \underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_5\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_5^e$$

$$+\underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_6\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_6^e + \underbrace{\rho_0 b\left[\Lambda\right]^T\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{\left[\Delta M_7\right]_e}\left[\Lambda\right]\Psi_7^e \tag{2.63}$$

Các biến ngẫu nhiên Ψ_i^e xuất hiện trong phương trình (2.63) được xác định như phương trình (2.64) thông qua tích phân trọng số của trường ngẫu nhiên hai chiều mật độ khối lượng và các đơn thức.

$$\Psi_i^e = \int_{A_e} x^{i-1} g_e\left(x,y\right)dxdy \quad ; \quad i = 1,2,3,...,7 \tag{2.64}$$

Thay phương trình (2.37) vào phương trình (2.63) thu được các ma trận hệ số như các phương trình (2.65) - (2.71).

$$\left[\Delta M_1\right]_e = b\rho_0\begin{bmatrix}1&0&0&0\\&0&0&0\\&&0&0\\\text{sym.}&&&0\end{bmatrix} \tag{2.65}$$

$$\left[\Delta M_2\right]_e = b\rho_0\begin{bmatrix}0&1&0&0\\&0&0&0\\&&0&0\\\text{sym.}&&&0\end{bmatrix} \tag{2.66}$$

$$\left[\Delta M_3\right]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^2}\begin{bmatrix}-6&-2L_e&3&-L_e\\&L_e^2&0&0\\&&0&0\\\text{sym.}&&&0\end{bmatrix} \tag{2.67}$$

$$\left[\Delta M_4\right]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^3}\begin{bmatrix} 4 & -2L_e & -2 & L_e \\ & -4L_e^2 & 3L_e & -L_e^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

$$\left[\Delta M_5\right]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^4}\begin{bmatrix} 9 & 8L_e & -9 & 3L_e \\ & 6L_e^2 & -8L_e & 3L_e^2 \\ & & 9 & -3L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

$$\left[\Delta M_6\right]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^5}\begin{bmatrix} -12 & -7L_e & 12 & -5L_e \\ & -4L_e^2 & 7L_e & -3L_e^2 \\ & & -12 & 5L_e \\ \text{sym.} & & & -2L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

$$\left[\Delta M_7\right]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^6}\begin{bmatrix} 4 & 2L_e & -4 & 2L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ & & 4 & -2L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

Ma trận khối lượng của phần tử được viết lại như phương trình (2.72) là hàm của các biến ngẫu nhiên được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên hai chiều.

$$\left[M\right]_e = \left[M_0\right]_e + \sum_{i=1}^{7}\left[\Delta M_i\right]_e \Psi_i^e \tag{2.72}$$

2.2.3. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao mặt cắt là *h*, chiều rộng mặt cắt là *b* và chiều dài nhịp là *L*. *E* của kết cấu dầm ngẫu nhiên dọc theo chiều dài, chiều cao và bề rộng của dầm như phương trình (2.6) với E_0 là giá trị kỳ vọng của *E*, $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên dừng, ba chiều có kỳ vọng bằng không. *E* của phần tử thứ *e* được biểu diễn như (2.73).

$$E_e\left(x,y,z\right) = E_0\left[1+ f_e\left(x,y,z\right)\right] \tag{2.73}$$

Khi mô đun đàn hồi biến thiên ngẫu nhiên trên mặt cắt ngang, các mô men tĩnh đàn hồi và mô men quán tính ly tâm đàn hồi có thể khác không trong từng hiện thực, mặc dù tiết diện đối xứng về hình học và mô đun đàn hồi trung bình đồng nhất. Do đó, vị trí tâm đàn hồi có thể thay đổi và xuất hiện các thành phần ghép giữa biến dạng dọc trục với uốn, cũng như giữa uốn theo hai phương. Trong phạm vi nghiên cứu, luận án sử dụng mô hình dầm uốn phẳng với trục hình học làm trục tham chiếu cố định và bỏ qua các thành phần ghép nêu

trên cùng ảnh hưởng của xoắn. Sử dụng phương pháp tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi được phát triển trong mục 2.2.1. $[K]_e$ có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (2.74) với các biến ngẫu nhiên cơ bản được xác định như (2.75) và các ma trận được xác định như (2.76) - (2.78).

$$\left[K\right]_e = \left[K_0\right]_e + \left[\Delta K_1\right]_e \Theta_1^e + \left[\Delta K_2\right]_e \Theta_2^e + \left[\Delta K_3\right]_e \Theta_3^e \tag{2.74}$$

$$\Theta_i^e = \int_{V_e} x^{i-1} y^2 f_e\left(x,y,z\right) dV_e \quad ; \quad i = 1,2,3 \tag{2.75}$$

$$\left[\Delta K_1\right]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

$$\left[\Delta K_2\right]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

$$\left[\Delta K_3\right]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

2.2.4. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều

Xét dầm có chiều dài nhịp L mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao mặt cắt là h, bề rộng mặt cắt là b. E và ρ của dầm thay đổi ngẫu nhiên ba chiều như các phương trình (2.79) và (2.80) với $f(x,y,z)$ và $g(x,y,z)$ là các trường ngẫu nhiên dừng, có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$E\left(x,y,z\right) = E_0\left[1 + f\left(x,y,z\right)\right] \tag{2.79}$$

$$\rho\left(x,y,z\right) = \rho_0\left[1 + g\left(x,y,z\right)\right] \tag{2.80}$$

Theo FEM kết cấu dầm được phân chia thành N_e phần tử. Ma trận $[M]_e$ của phần tử có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (2.81) với các ma trận được xác định như các phương trình (2.82) - (2.88) và biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.89).

$$\left[M\right]_e = \left[M_0\right]_e + \sum_{i=1}^{7} \left[\Delta M_i\right]_e \Psi_i^e \tag{2.81}$$

$$\left[\Delta M_1\right]_e = \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

$$\left[\Delta M_2\right]_e = \rho_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

$$\left[\Delta M_3\right]_e = \frac{\rho_0}{L_e^2} \begin{bmatrix} -6 & -2L_e & 3 & -L_e \\ & L_e^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

$$\left[\Delta M_4\right]_e = \frac{\rho_0}{L_e^3} \begin{bmatrix} 4 & -2L_e & -2 & L_e \\ & -4L_e^2 & 3L_e & -L_e^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

$$\left[\Delta M_5\right]_e = \frac{\rho_0}{L_e^4} \begin{bmatrix} 9 & 8L_e & -9 & 3L_e \\ & 6L_e^2 & -8L_e & 3L_e^2 \\ & & 9 & -3L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

$$\left[\Delta M_6\right]_e = \frac{\rho_0}{L_e^5} \begin{bmatrix} -12 & -7L_e & 12 & -5L_e \\ & -4L_e^2 & 7L_e & -3L_e^2 \\ & & -12 & 5L_e \\ \text{sym.} & & & -2L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

$$\left[\Delta M_7\right]_e = \frac{\rho_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 4 & 2L_e & -4 & 2L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ & & 4 & -2L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

$$\Psi_i^e = \int_{V_e} x^{i-1} g_e\left(x, y, z\right) dxdydz \quad ; \quad i = 1,2,3,...,7 \tag{2.89}$$

2.3. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN TĨNH

Phương trình cân bằng của toàn kết cấu khi phân tích tĩnh dầm bằng FEM như phương trình (2.90) với [*K*] là ma trận độ cứng tổng thể được xác định thông qua ma trận

độ cứng của phần tử như phương trình (2.91), véc tơ chuyển vị nút $\{U\}$ và véc tơ tải trọng nút $\{P\}$.

$$[K]\{U\} = \{P\} \tag{2.90}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext} \tag{2.91}$$

Thay phương trình (2.53) đối với bài toán dầm có *E* thay đổi ngẫu nhiên hai chiều hoặc phương trình (2.74) đối với bài toán dầm có *E* thay đổi ngẫu nhiên ba chiều vào phương trình (2.91) thì [*K*] được xác định như phương trình (2.92) với ký hiệu *Ext* trong $[K]_e^{Ext}$ là ma trận mở rộng của phần tử thứ *e*. Ma trận này có cùng kích thước với ma trận tổng thể, được hình thành bằng cách đặt các phần tử của ma trận cục bộ vào đúng vị trí hàng và vị trí cột tương ứng với chỉ số của bậc tự do toàn cục của các nút thuộc phần tử, trong khi các số hạng còn lại được gán giá trị bằng không.

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \left([\Delta K_1]_e^{Ext} \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e^{Ext} \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e^{Ext} \Theta_3^e \right) \tag{2.92}$$

Đặt $[K_0] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext}$ là phần tất định của ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu, thay vào (2.92) thu được (2.93).

$$[K] = [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \left([\Delta K_1]_e^{Ext} \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e^{Ext} \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e^{Ext} \Theta_3^e \right) \tag{2.93}$$

Để ý đến phương trình (2.93), [*K*] là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \left\{\Theta_i^e\right\}_{i=1,2,3}^{e=1,2,...,N_e}$. Do đó véc tơ chuyển vị nút cũng là hàm của các biến ngẫu nhiên. Phương trình (2.90) có thể viết lại dưới dạng như sau:

$$\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]\left\{U\left(\{\Theta\}\right)\right\} = \{P\} \tag{2.94}$$

Thực hiện triển khai các đại lượng tham gia trong (2.94) dưới dạng chuỗi Taylor xung quanh giá trị kỳ vọng $\bar{\Theta}_i^e$ của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}$ thu được (2.95) - (2.96).

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{3} \left[K_i^e\right]_I \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e\right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \left[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right]_{II} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right) + ... \tag{2.95}$$

$$\{U\} \approx \{U_0\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{3} \left\{U_i^e\right\}_I \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e\right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \left\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right\}_{II} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right) + ... \tag{2.96}$$

Các ma trận xuất hiện trong (2.95) - (2.96) được xác định như (2.97) - (2.100).

$$\left[K_i^e\right]_I = \left.\frac{\partial[K]}{\partial\Theta_i^e}\right|_{\overline{\Theta}_i^e} \tag{2.97}$$

$$\left[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right]_{II} = \left.\frac{\partial^2[K]}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right|_{\overline{\Theta}_i^e} \tag{2.98}$$

$$\left\{U_i^e\right\}_I = \left.\frac{\partial\{U\}}{\partial\Theta_i^e}\right|_{\overline{\Theta}_i^e} \tag{2.99}$$

$$\left\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right\}_{II} = \left.\frac{\partial^2\{U\}}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right|_{\overline{\Theta}_i^e} \tag{2.100}$$

Trong các phương trình (2.97) - (2.100) các ký hiệu: $\left[K_i^e\right]_I$, $\left\{U_i^e\right\}_I$ là đạo hàm riêng bậc I theo biến ngẫu nhiên Θ_i^e và $\left[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right]_{II}$, $\left\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right\}_{II}$ là đạo hàm riêng bậc II theo biến ngẫu nhiên $\Theta_{i_1}^{e_1}$ và $\Theta_{i_2}^{e_2}$ được xác định tại giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Các biến ngẫu nhiên Θ_i^e được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên *f(x,y)* hoặc trường ngẫu nhiên *f(x,y,z)* có kỳ vọng bằng không nên các biến ngẫu nhiên Θ_i^e cũng có giá trị kỳ vọng bằng không. Thay vào các phương trình (2.95) - (2.96) thu được các phương trình:

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[K_i^e\right]_I \Theta_i^e + \frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right]_{II}\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2} + \ldots \tag{2.101}$$

$$\{U\} \approx \{U_0\} + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left\{U_i^e\right\}_I \Theta_i^e + \frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right\}_{II}\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2} + \ldots \tag{2.102}$$

Thay các phương trình (2.101) - (2.102) vào phương trình (2.94) thực hiện đồng nhất các hệ số cùng bậc đạo hàm riêng thu được các phương trình:

- ✓ Bậc không:

$$\{U_0\} = [K_0]^{-1}\{P\} \tag{2.103}$$

- ✓ Đạo hàm bậc I:

$$\left\{U_i^e\right\}_I = -[K_0]^{-1}\left[K_i^e\right]_I \{U_0\} \tag{2.104}$$

- ✓ Đạo hàm bậc II:

$$\left\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right\}_{II} = [K_0]^{-1}\left\{-\left[K_{i_1}^{e_1}\right]_I \left\{U_{i_2}^{e_2}\right\}_I - \left[K_{i_2}^{e_2}\right]_I \left\{U_{i_1}^{e_1}\right\} - \left[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\right]_{II}\{U_0\}\right\} \tag{2.105}$$

Thay phương trình (2.104) vào phương trình (2.102) thu được xấp xỉ bậc nhất của véc tơ $\{U\}$ của toàn kết cấu như phương trình (2.106).

$$\{U\} \approx \{U_0\} - \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[K_0]^{-1}\left[K_i^e\right]_I \{U_0\}\Theta_i^e \tag{2.106}$$

Thực hiện các phép toán xác định kỳ vọng và phương sai thu được giá trị kỳ vọng của véc tơ chuyển vị nút và ma trận hiệp phương sai của chuyển vị nút được xác định như các công thức từ (2.107) đến (2.108).

$$\mathbb{E}\left[\{U\}\right] \approx \mathbb{E}\left[\{U_0\} - \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[K_0]^{-1}\left[K_i^e\right]_I \{U_0\}\Theta_i^e\right] \approx \{U_0\} \tag{2.107}$$

$$Cov\left[\{U\},\{U\}^T\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}[K_0]^{-1}\left[K_{i_1}^{e_1}\right]_I \{U_0\}\times \\ \{U_0\}^T\left(\left[K_{i_2}^{e_2}\right]_I\right)^T\left([K_0]^{-1}\right)^T\end{array}\right\}\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right] \tag{2.108}$$

Để ý đến phương trình (2.93) [*K*] được biểu diễn tuyến tính phụ thuộc vào biến ngẫu nhiên Θ_i^e do đó đạo hàm riêng bậc I của [*K*] xuất hiện trong phương trình (2.108) có thể được xác định như phương trình (2.109) với ký hiệu $[\Delta K_i]_e^{Ext}$ là ma trận được mở rộng từ ma trận $[\Delta K_i]_e$. Các ma trận $[\Delta K_i]_e$ được xác định trong các phương trình (2.50) - (2.52) đối với bài toán dầm có *E* thay đổi ngẫu nhiên hai chiều và các phương trình (2.76) - (2.78) đối với bài toán dầm có *E* ngẫu nhiên 3D:

$$\left[K_i^e\right]_I = [\Delta K_i]_e^{Ext} \tag{2.109}$$

Thay phương trình (2.109) vào phương trình (2.108) thu được ma trận hiệp phương sai của véc tơ chuyển vị nút như sau:

$$Cov^I\left[\{U\},\{U\}^T\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}[K_0]^{-1}\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\{U_0\}\times \\ \{U_0\}^T\left(\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\right)^T\left([K_0]^{-1}\right)^T\end{array}\right\}\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right] \tag{2.110}$$

Giá trị kỳ vọng $\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right]$ của các biến ngẫu nhiên Θ_i^e xuất hiện trong (2.110) được xác định thông qua trường ngẫu nhiên của *E*. Trong trường hợp mô đun đàn hồi của dầm là trường ngẫu nhiên hai chiều, để ý đến phương trình (2.49) giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.111). Tương tự cho trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.112).

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right] = \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2\mathbb{E}\left[f_{e_1}(x_1,y_1), f_{e_2}(x_2,y_2)\right]dA_{e_1}dA_{e_2} \tag{2.111}$$

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right] = \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2\mathbb{E}\left[f_{e_1}(x_1,y_1,z_1), f_{e_2}(x_2,y_2,z_2)\right]dV_{e_1}dV_{e_2} \tag{2.112}$$

Giá trị kỳ vọng của trường ngẫu nhiên xuất hiện trong các phương trình (2.111) - (2.112) được xác định thông qua hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên như sau:

$$\mathbb{E}\left[f_{e_1}(x_1,y_1),\, f_{e_2}(x_2,y_2)\right] = R_{f_{e_1} f_{e_2}} \tag{2.113}$$

$$\mathbb{E}\left[f_{e_1}(x_1,y_1,z_1),\, f_{e_2}(x_2,y_2,z_2)\right] = R_{f_{e_1} f_{e_2}} \tag{2.114}$$

Thay các công thức từ (2.113) đến (2.114) vào các phương trình (2.111) - (2.112) thu được các phương trình (2.115) - (2.116).

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right] = \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}}\, dA_{e_1}\, dA_{e_2} \tag{2.115}$$

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right] = \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}}\, dV_{e_1}\, dV_{e_2} \tag{2.116}$$

Thay (2.115) - (2.116) vào (2.110) thu được ma trận hiệp phương sai của véc tơ chuyển vị trong hai trường hợp: mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (2.117) và mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều như (2.118).

$$Cov^I\left[\{U\},\{U\}^T\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}\left[K_0\right]^{-1}\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\{U_0\}\{U_0\}^T\left(\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\right)^T \\ \times\left(\left[K_0\right]^{-1}\right)^T\int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}}\, dA_{e_1}\, dA_{e_2}\end{array}\right\} \tag{2.117}$$

$$Cov^I\left[\{U\},\{U\}^T\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}\left[K_0\right]^{-1}\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\{U_0\}\{U_0\}^T\left(\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\right)^T \times \\ \left(\left[K_0\right]^{-1}\right)^T\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}}\, dV_{e_1}\, dV_{e_2}\end{array}\right\} \tag{2.118}$$

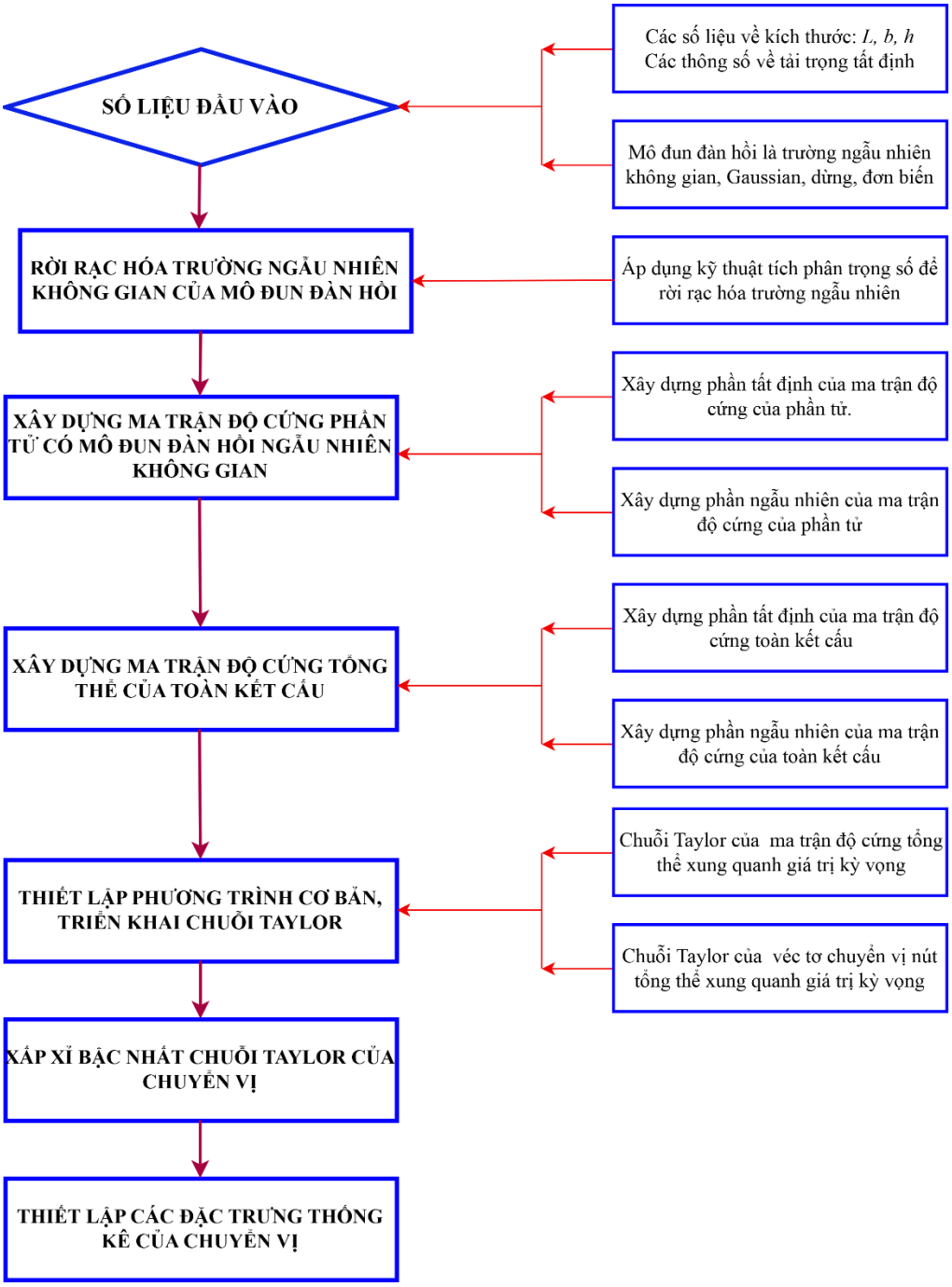
Phương sai của chuyển vị nút được xác định thông qua ma trận hiệp phương sai của chuyển vị nút là các giá trị nằm trên đường chéo chính của ma trận hiệp phương sai. Vì vậy phương sai của chuyển vị nút khi có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên được xác định:

$$Var\left[\{U\},\{U\}^T\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}diag\left(\left[K_0\right]^{-1}\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\{U_0\}\right)\{U_0\}^T\left(\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\right)^T \times \\ \left(\left[K_0\right]^{-1}\right)^T\int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}}\, dA_{e_1}\, dA_{e_2}\end{array}\right\} \tag{2.119}$$

$$Var\left[\{U\},\{U\}^T\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}diag\left(\left[K_0\right]^{-1}\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\{U_0\}\right)\{U_0\}^T\left(\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\right)^T \times \\ \left(\left[K_0\right]^{-1}\right)^T\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}}\, dV_{e_1}\, dV_{e_2}\end{array}\right\} \tag{2.120}$$

COV của chuyển vị nút tại giữa nhịp được xác định bằng tỷ số giữa độ lệch chuẩn của chuyển vị nút chia cho giá trị kỳ vọng của chuyển vị nút tại giữa nhịp như (2.121). Các bước chính để phân tích ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian bằng SFEM được thể hiện trong Hình 2.4.

$$\mathrm{COV} = \frac{\sqrt{Var\left[\{U\},\{U\}^T\right]_{\frac{L}{2}}}}{\left|\mathbb{E}\left[\{U\}\right]_{\frac{L}{2}}\right|} \tag{2.121}$$



Hình 2.4. Các bước phân tích đáp ứng tĩnh ngẫu nhiên bằng SFEM

2.4. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH

2.4.1. Phân tích dao động uốn tự do của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang chữ nhật có chiều cao *h*, bề rộng *b* và chiều dài nhịp là *L*. Trong nghiên cứu này sử dụng phần tử dầm có hai nút tại hai đầu của phần tử, mỗi nút có hai bậc tự do. Quan hệ giữa chuyển vị của phần tử và chuyển vị nút của phần tử được xác định như phương trình sau:

$$w^e = [N]\{q_i\}^e \tag{2.122}$$

Với [*N*] là ma trận hàm dạng [14] được xác định như các phương trình (2.123).

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \tag{2.123}$$

Thế năng biến dạng uốn của phần tử được xác định như phương trình (2.124):

$$U^e = \frac{1}{2}\int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV_e \tag{2.124}$$

Quan hệ giữa véc tơ biến dạng và chuyển vị nút của phần tử được xác định thông qua ma trận tính biến dạng [*B*] như phương trình (2.125).

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q_i^e\} \tag{2.125}$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được xác định theo định luật Hooke như phương trình (2.126) với [*D*] là ma trận đàn hồi.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{2.126}$$

Thay các phương trình (2.125), (2.126) vào (2.124) thu được (2.127):

$$U^e = \frac{1}{2}\{q_i^e\}^T \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e \{q_i^e\} \tag{2.127}$$

Động năng của phần tử được xác định như phương trình (2.128) với ρ là mật độ khối lượng:

$$T^e = \frac{1}{2}\int_{V_e} \rho\{\dot{w}^e\}^T \{\dot{w}^e\} dV_e \tag{2.128}$$

Thay phương trình (2.122) vào phương trình (2.128) thu được động năng của phần tử như phương trình (2.129):

$$T^e = \frac{1}{2}\{\dot{q}_i^e\}^T \int_{V_e} \rho[N]^T [N] dV_e \{\dot{q}_i^e\} \tag{2.129}$$

Sử dụng nguyên lý biến phân như (2.130) thu được phương trình vi phân dao động tự do không xét đến cản của bài toán như (2.131) với [*K*] được xác định như phương trình (2.132), [*M*] là ma trận khối lượng của toàn kết cấu được xác định như phương trình (2.133), $\{w\}$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể, $\{\ddot{w}\}$ là véc tơ gia tốc nút tổng thể.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_{e=1}^{N_e}\left(T^e-U^e\right)dt=0 \tag{2.130}$$

$$[M]\{\ddot{w}\}+[K]\{w\}=0 \tag{2.131}$$

$$[K]=\sum_{e=1}^{N_e}[K]_e^{Ext} \tag{2.132}$$

$$[M]=\sum_{e=1}^{N_e}[M]_e^{Ext} \tag{2.133}$$

Trong phương trình (2.132), với ma trận $[K]_e^{Ext}$ được xác định từ $[K]_e$ là ma trận độ cứng của phần tử được xác định như (2.134) và $[M]_e^{Ext}$ được thiết lập từ $[M]_e$ trong (2.133) là ma trận khối lượng của phần tử được xác định như (2.135).

$$[K]_e=\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV_e \tag{2.134}$$

$$[M]_e=\int_{V_e}\rho[N]^T[N]dV_e \tag{2.135}$$

Trong trường hợp kết cấu dao động điều hòa, véc tơ chuyển vị nút tổng thể có thể được giả định như phương trình (2.136) với $\{\Phi\}$ là biên độ dao động của các nút trong kết cấu, ω là tần số góc dao động riêng của kết cấu.

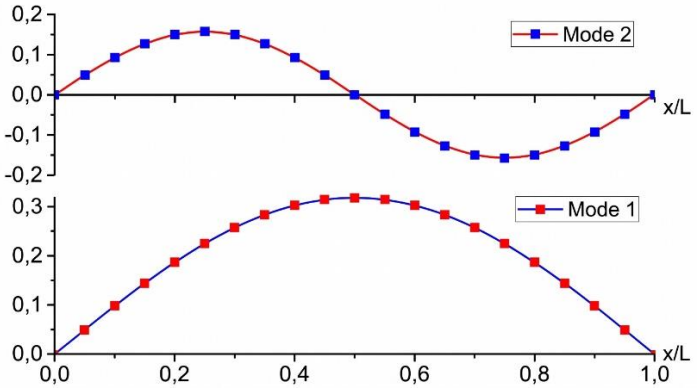
$$\{w\}=\{\Phi\}e^{-i\omega t} \tag{2.136}$$

Thay phương trình (2.136) vào phương trình (2.131) thu được phương trình (2.137):

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{\Phi\}e^{-i\omega t}=0 \tag{2.137}$$

Tần số góc của dao động riêng được xác định từ điều kiện đảm bảo phương trình (2.137) có nghiệm khác không như phương trình (2.138):

$$Det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0 \tag{2.138}$$



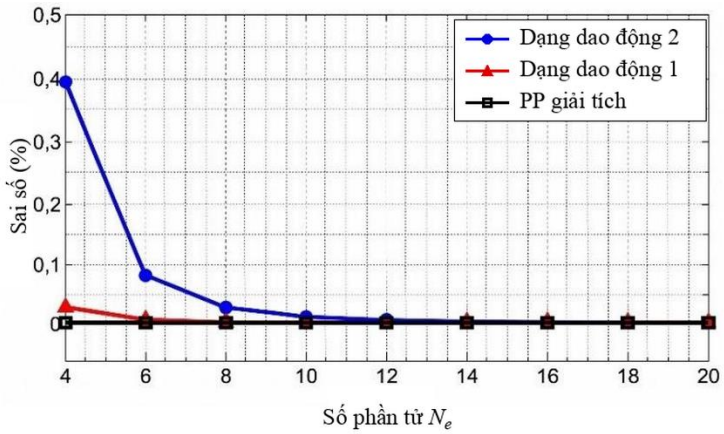
Hình 2.5. Mode dao động thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn

Hình 2.5 thể hiện mode dao động thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn. Để kiểm tra kết quả phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng FEM trong nghiên cứu này người viết so sánh kết quả phân tích tần số góc dao động riêng của dầm bằng FEM với phương pháp giải tích. Đối với dầm Euler-Bernoulli phương trình vi phân dao động tự do của dầm không xét đến cản được xác định như phương trình (2.139) với m là khối lượng phân bố trên một đơn vị chiều dài:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{2.139}$$

Giải phương trình (2.139) trong trường hợp bài toán dầm giản đơn, ta có tần số góc dao động riêng không xét đến cản trong trường hợp khối lượng phân bố đều như (2.140):

$$\omega_i^2=\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\frac{EI}{m} \tag{2.140}$$



Hình 2.6. Sai số của tần số góc dao động riêng xác định bằng FEM và giải tích

Hình 2.6 thể hiện sai số tần số góc dao động riêng thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn được xác định bằng FEM và phương pháp giải tích tương ứng với lưới chia phần tử thay đổi từ 4 đến 20 phần tử. Có thể nhận thấy khi số lượng phần tử tăng thì tần số góc dao động riêng của dầm được phân tích bằng FEM tiến tới giá trị tần số góc dao động riêng được xác định bằng giải tích.

2.4.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Xem xét kết cấu dầm có chiều dài nhịp L, mặt cắt ngang hình chữ nhật có E và ρ ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều). Để ý đến các công thức (2.53) và (2.74) ma trận $[K]_e$ của phần tử là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên Θ_i^e. Tương tự ma trận $[M]_e$ cũng được biểu diễn tuyến tính thông qua các ma trận hệ số và các biến ngẫu nhiên

Ψ_i^e. Theo (2.132) và (2.133) ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn kết cấu dầm được xác định từ ma trận độ cứng phần tử và ma trận khối lượng phần tử. Thay phương trình (2.53) vào phương trình (2.132) thu được [*K*] trong trường hợp *E* thay đổi ngẫu nhiên hai chiều, thay phương trình (2.74) vào phương trình (2.132) thu được [*K*] trong trường hợp *E* thay đổi ngẫu nhiên ba chiều. Tương tự, khi thay phương trình (2.72) vào phương trình (2.133) và phương trình (2.81) vào phương trình (2.133) thu được ma trận khối lượng của kết cấu dầm trong trường hợp mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.

$$[K]=\sum_{e=1}^{N_e}[K]_e=\sum_{e=1}^{N_e}[K_0]_e^{Ext}+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[\Delta K_i]_e^{Ext}\,\Theta_i^e=[K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[\Delta K_i]_e^{Ext}\,\Theta_i^e \tag{2.141}$$

$$[M]=\sum_{e=1}^{N_e}[M]_e=\sum_{e=1}^{N_e}[M_0]_e^{Ext}+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e^{Ext}\,\Psi_i^e=[M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e^{Ext}\,\Psi_i^e \tag{2.142}$$

Để ý đến phương trình (2.141) ma trận [*K*] là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}=\left\{\Theta_i^e\right\}_{i=1,2,3}^{e=1,\ldots,N_e}$. Tương tự ma trận khối lượng tổng thể của toàn kết cấu dầm cũng là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên $\{\Psi\}=\left\{\Psi_i^e\right\}_{i=1,\ldots,7}^{e=1,\ldots,N_e}$. Thay phương trình (2.141) và phương trình (2.142) vào phương trình (2.137) thu được (2.143).

$$\left[\left([K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[\Delta K_i]_e^{Ext}\,\Theta_i^e\right)-\omega^2\left([M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e^{Ext}\,\Psi_i^e\right)\right]\{\Phi\}=0 \tag{2.143}$$

Đặt $\lambda=\omega^2$ là giá trị riêng thay vào phương trình (2.143) thu được phương trình (2.144).

$$\left[\left([K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[\Delta K_i]_e^{Ext}\,\Theta_i^e\right)-\lambda\left([M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e^{Ext}\,\Psi_i^e\right)\right]\{\Phi\}=0 \tag{2.144}$$

Đối với giá trị riêng thứ *k* và dạng dao động riêng thứ *k* thì:

$$\left[\underbrace{\left([K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[\Delta K_i]_e^{Ext}\,\Theta_i^e\right)}_{[K]}-\lambda_k\left([M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e^{Ext}\,\Psi_i^e\right)\right]\{\Phi\}_k=0 \tag{2.145}$$

Vì ma trận độ cứng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}=\left\{\Theta_i^e\right\}_{i=1,2,3}^{e=1,\ldots,N_e}$, ma trận khối lượng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Psi\}=\left\{\Psi_i^e\right\}_{i=1,\ldots,7}^{e=1,\ldots,N_e}$ nên giá trị riêng thứ *k* và dạng dao động riêng thứ *k* cũng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}=\left\{\Theta_i^e\right\}_{i=1,2,3}^{e=1,\ldots,N_e}$ và $\{\Psi\}=\left\{\Psi_i^e\right\}_{i=1,\ldots,7}^{e=1,\ldots,N_e}$. Triển khai chuỗi Taylor của ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, giá trị riêng thứ *k* và dạng dao động riêng thứ *k* ta có các phương trình (2.146) -(2.149):

$$[K]\approx[K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial[K]}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\left(\Theta_i^e-\overline{\Theta}_i^e\right)+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2[K]}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\left(\Theta_{i_1}^{e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2}^{e_2}-\overline{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right)+\ldots \quad (2.146)$$

$$[M]\approx[M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}\left[\frac{\partial[M]}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\left(\Psi_i^e-\overline{\Psi}_i^e\right)+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial\Psi_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\left(\Psi_{i_1}^{e_1}-\overline{\Psi}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Psi_{i_2}^{e_2}-\overline{\Psi}_{i_2}^{e_2}\right)+\ldots \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned}\lambda_k \approx{}& \lambda_k^0+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\lambda_k}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\left(\Theta_i^e-\overline{\Theta}_i^e\right)+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}\left[\frac{\partial\lambda_k}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\left(\Psi_i^e-\overline{\Psi}_i^e\right)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\left(\Theta_{i_1}^{e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2}^{e_2}-\overline{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial\Psi_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\left(\Psi_{i_1}^{e_1}-\overline{\Psi}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Psi_{i_2}^{e_2}-\overline{\Psi}_{i_2}^{e_2}\right)\\ &+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e,\overline{\Psi}_i^e}\left(\Theta_{i_1}^{e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Psi_{i_2}^{e_2}-\overline{\Psi}_{i_2}^{e_2}\right)+\ldots\end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned}\{\Phi\}_k \approx{}& \{\Phi\}_k^0+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\left(\Theta_i^e-\overline{\Theta}_i^e\right)+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}\left[\frac{\partial\{\Phi\}_k}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\left(\Psi_i^e-\overline{\Psi}_i^e\right)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\left(\Theta_{i_1}^{e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2}^{e_2}-\overline{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\{\Phi\}_k}{\partial\Psi_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\left(\Psi_{i_1}^{e_1}-\overline{\Psi}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Psi_{i_2}^{e_2}-\overline{\Psi}_{i_2}^{e_2}\right)\\ &+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e,\overline{\Psi}_i^e}\left(\Theta_{i_1}^{e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Psi_{i_2}^{e_2}-\overline{\Psi}_{i_2}^{e_2}\right)+\ldots\end{aligned} \quad (2.149)$$

Trong các phương trình (2.146) - (2.149) các đạo hàm riêng bậc I và đạo hàm riêng bậc II của các đại lượng được xác định tương ứng với giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Ký hiệu $[\bullet]_{\overline{\Theta}_i^e}$,$[\bullet]_{\overline{\Psi}_i^e}$,$[\bullet]_{\overline{\Theta}_i^e,\overline{\Psi}_i^e}$ là giá trị của đạo hàm riêng được xác định tương ứng với kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Vì các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}=\left\{\Theta_i^e\right\}_{i=1,2,3}^{e=1,\ldots,N_e}$ được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng toán bằng không. Do đó giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên này bằng không, tương tự với các biến ngẫu nhiên $\{\Psi\}=\left\{\Psi_i^e\right\}_{i=1,\ldots,7}^{e=1,\ldots,N_e}$ cũng có giá trị kỳ vọng bằng không. Thay vào các phương trình (2.146) - (2.149) thu được các phương trình (2.150) - (2.153).

$$[K]\approx[K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial[K]}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\Theta_i^e+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2[K]}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}+\ldots \quad (2.150)$$

$$[M]\approx[M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}\left[\frac{\partial[M]}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\Psi_i^e+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial\Psi_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}+\ldots \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k \approx \lambda_k^0 &+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\lambda_k}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\Theta_i^e+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}\left[\frac{\partial\lambda_k}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\Psi_i^e+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial\Psi_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\lambda_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e,\overline{\Psi}_i^e}\Theta_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}+\ldots\end{aligned} \tag{2.152}$$

$$\begin{aligned}\{\Phi\}_k \approx \{\Phi\}_k^0 &+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\Theta_i^e+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}\left[\frac{\partial\{\Phi\}_k}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\Psi_i^e+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Theta_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\{\Phi\}_k}{\partial\Psi_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left[\frac{\partial^2\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_{i_1}^{e_1}\partial\Psi_{i_2}^{e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_i^e,\overline{\Psi}_i^e}\Theta_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}+\ldots\end{aligned} \tag{2.153}$$

Thay các phương trình (2.150) - (2.153) vào phương trình (2.145), gom các hệ số cùng bậc đạo hàm thu được các phương trình sau:

- ✓ Bậc không:

$$\left([K_0]-\lambda_k^0[M_0]\right)\{\Phi\}_k^0=0 \tag{2.154}$$

- ✓ Bậc nhất:

$$\begin{aligned}\left([K_0]-\lambda_k^0[M_0]\right)\left[\frac{\partial\{\Phi\}_k}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}&=\left(\left[\frac{\partial\lambda_k}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}[M_0]-\left[\frac{\partial[K]}{\partial\Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e}\right)\{\Phi\}_k^0\\ \left([K_0]-\lambda_k^0[M_0]\right)\left[\frac{\partial\{\Phi\}_k}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}&=\left(\left[\frac{\partial\lambda_k}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}[M_0]+\lambda_k^0\left[\frac{\partial[M]}{\partial\Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e}\right)\{\Phi\}_k^0\end{aligned} \tag{2.155}$$

Nhân cả hai vế của phương trình (2.145) với $\{\Phi\}_k^T$ thu được phương trình (2.156).

$$\{\Phi\}_k^T\left(\underbrace{\left([K_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3}[\Delta K_i]_e^{Ext}\Theta_i^e\right)}_{[K]}-\lambda_k\left([M_0]+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7}[\Delta M_i]_e^{Ext}\Psi_i^e\right)\right)\{\Phi\}_k=0 \tag{2.156}$$

Điều kiện trực giao của các dạng dao động thỏa mãn (2.157) với δ_{ij} là ký hiệu Kronecker.

$$\begin{aligned}\left\{\Phi_i^0\right\}^T[M_0]\left\{\Phi_j^0\right\}&=\delta_{ij}\\ \left\{\Phi_i^0\right\}^T[K_0]\left\{\Phi_j^0\right\}&=\lambda_i^0\delta_{ij}\end{aligned} \tag{2.157}$$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (2.156) theo các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}=\left\{\Theta_i^e\right\}_{i=1,2,3}^{e=1,\ldots,N_e}$, $\{\Psi\}=\left\{\Psi_i^e\right\}_{i=1,\ldots,7}^{e=1,\ldots,N_e}$ Các công thức độ nhạy dưới đây được thiết lập cho trị riêng đơn tại cấu

hình trung bình; các dạng dao động riêng được chuẩn hóa theo điều kiện (2.157) và để ý đến phương trình (2.155) thu được các phương trình sau:

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e} = \left\{\Phi_k^0\right\}^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e} \left\{\Phi_k^0\right\} \tag{2.158}$$

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e} = -\left\{\Phi_k^0\right\}^T \lambda_k^0 \left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e} \left\{\Phi_k^0\right\} \tag{2.159}$$

Ma trận độ cứng tổng thể và ma trận khối lượng tổng thể là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Do đó đạo hàm riêng bậc nhất của ma trận độ cứng tổng thể theo biến ngẫu nhiên Θ_i^e xuất hiện trong phương trình (2.158) được xác định như (2.160). Tương tự đạo hàm riêng bậc nhất của ma trận khối lượng theo biến ngẫu nhiên Ψ_i^e xuất hiện trong phương trình (2.159) được xác định như phương trình (2.161). Với $\left[\Delta K_i\right]_e^{Ext}$ được xác định bằng cách mở rộng ma trận $\left[\Delta K_i\right]_e$ bằng với kích thước của ma trận độ cứng tổng thể. Tương tự với ma trận $\left[\Delta M_i\right]_e^{Ext}$ thu được từ ma trận $\left[\Delta M_i\right]_e$.

$$\left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e} = \left[\Delta K_i\right]_e^{Ext} \tag{2.160}$$

$$\left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e} = \left[\Delta M_i\right]_e^{Ext} \tag{2.161}$$

Thay các phương trình (2.160) - (2.161) vào các phương trình (2.158) - (2.159) thu được:

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e}\right]_{\overline{\Theta}_i^e} = \left\{\Phi_k^0\right\}^T \left[\Delta K_i\right]_e^{Ext} \left\{\Phi_k^0\right\} \tag{2.162}$$

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e}\right]_{\overline{\Psi}_i^e} = -\left\{\Phi_k^0\right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_i\right]_e^{Ext} \left\{\Phi_k^0\right\} \tag{2.163}$$

Thay các phương trình (2.162) - (2.163) vào phương trình (2.152) thu được xấp xỉ bậc nhất của giá trị riêng như phương trình sau:

$$\lambda_k \approx \lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3} \left\{\Phi_k^0\right\}^T \left[\Delta K_i\right]_e^{Ext} \left\{\Phi_k^0\right\} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7} \left(-\left\{\Phi_k^0\right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_i\right]_e^{Ext} \left\{\Phi_k^0\right\}\right) \Psi_i^e \tag{2.164}$$

Kỳ vọng của giá trị riêng thứ *k* được xác định như phương trình:

$$\mathbb{E}\left[\lambda_k\right] \approx \mathbb{E}\left[\lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{3} \left\{\Phi_k^0\right\}^T \left[\Delta K_i\right]_e^{Ext} \left\{\Phi_k^0\right\} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{7} \left(-\left\{\Phi_k^0\right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_i\right]_e^{Ext} \left\{\Phi_k^0\right\}\right) \Psi_i^e\right] \approx \lambda_k^0 \tag{2.165}$$

Thực hiện phép tính phương sai của giá trị riêng thứ *k* thu được phương trình:

$$
\begin{aligned}
&Var\left[\lambda_k\right]=\mathbb{E}\left[\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\right]\\
&=\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right]\\
&+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\mathbb{E}\left[\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]\\
&+2\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left(-\lambda_k^0\right)\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]
\end{aligned}
\tag{2.166}
$$

Các giá trị kỳ vọng xuất hiện trong phương trình (2.166) có thể được xác định thông qua hàm tự tương quan và hàm tương quan chéo của các trường ngẫu nhiên. Hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên *f(x,y)* hoặc *f(x,y,z)* là R_{ff} , hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên *g(x,y)* hoặc *g(x,y,z)* là R_{gg} . Trong nghiên cứu này, trường ngẫu nhiên E và trường ngẫu nhiên ρ được xem xét là có tương quan với nhau thông qua γ và hàm tương quan chéo của *f(x,y)* và *g(x,y)* là R_{fg} như phương trình (2.167) trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều, tương tự hàm tương quan chéo được xác định như (2.168) trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều. Giá trị của hệ số tương quan thay đổi từ *-1* đến *+1*.

$$
R_{fg}=\gamma\sigma_f\sigma_g\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}\right] \tag{2.167}
$$

$$
R_{fg}=\gamma\sigma_f\sigma_g\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}-\frac{\left|\xi_3\right|}{d_z}\right] \tag{2.168}
$$

Để ý đến (2.49) và (2.64) trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên hai chiều. Các giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (2.166) được xác định như các phương trình sau:

$$
\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2R_{ff}\,dA_{e_1}\,dA_{e_2} \tag{2.169}
$$

$$
\mathbb{E}\left[\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}\,dA_{e_1}\,dA_{e_2} \tag{2.170}
$$

$$
\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}R_{fg}\,dA_{e_1}\,dA_{e_2} \tag{2.171}
$$

Để ý đến các phương trình (2.75) và phương trình (2.89) trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên ba chiều. Các giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (2.166) được xác định như các phương trình sau:

$$
\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2R_{ff}\,dV_{e_1}\,dV_{e_2} \tag{2.172}
$$

$$
\mathbb{E}\left[\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}}x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}\,dV_{e_1}\,dV_{e_2} \tag{2.173}
$$

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}R_{fg}\,dV_{e_1}dV_{e_2} \tag{2.174}$$

Thay các phương trình (2.169) - (2.171) vào phương trình (2.166) thu được phương sai của giá trị riêng ở dạng dao động thứ *k* trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (2.175).

$$\begin{aligned}
&Var\left[\lambda_k\right]=\mathbb{E}\left[\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\right]\\
&=\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{matrix}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times\\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2R_{ff}\,dA_{e_1}dA_{e_2}\end{matrix}\right\}\\
&+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\begin{matrix}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times\\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}\,dA_{e_1}dA_{e_2}\end{matrix}\right\}\\
&+2\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\begin{matrix}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left(-\lambda_k^0\right)\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times\\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}R_{fg}\,dA_{e_1}dA_{e_2}\end{matrix}\right\}
\end{aligned} \tag{2.175}$$

Nếu chỉ xét đến tính ngẫu nhiên hai chiều của *E* hoặc ρ thì phương sai của giá trị riêng thứ *k* được lần lượt xác định như các công thức sau:

$$\begin{aligned}
&Var\left[\lambda_k\right]=\mathbb{E}\left[\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\right]\\
&=\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{matrix}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times\\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2R_{ff}\,dA_{e_1}dA_{e_2}\end{matrix}\right\}
\end{aligned} \tag{2.176}$$

$$\begin{aligned}
&Var\left[\lambda_k\right]=\mathbb{E}\left[\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\left(\lambda_k-\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\right]\\
&=\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\begin{matrix}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}}x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}\,dA_{e_1}dA_{e_2}\end{matrix}\right\}
\end{aligned} \tag{2.177}$$

Trong trường hợp *E* và ρ ngẫu nhiên ba chiều, để ý đến các phương trình (2.172) - (2.174) thu được phương sai của giá trị riêng ở dạng dao động thứ *k* như phương trình sau:

$$
\begin{aligned}
Var\left[\lambda_k\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\left(\lambda_k - \mathbb{E}\left[\lambda_k\right]\right)\right] \\
&= \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1}y_1^2 x_2^{i_2-1}y_2^2 R_{ff}\,dV_{e_1}dV_{e_2}\end{array}\right\} \\
&+\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\begin{array}{l}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}\,dV_{e_1}dV_{e_2}\end{array}\right\} \\
&+2\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\begin{array}{l}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left(-\lambda_k^0\right)\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1}y_1^2 x_2^{i_2-1}R_{fg}\,dV_{e_1}dV_{e_2}\end{array}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.178}
$$

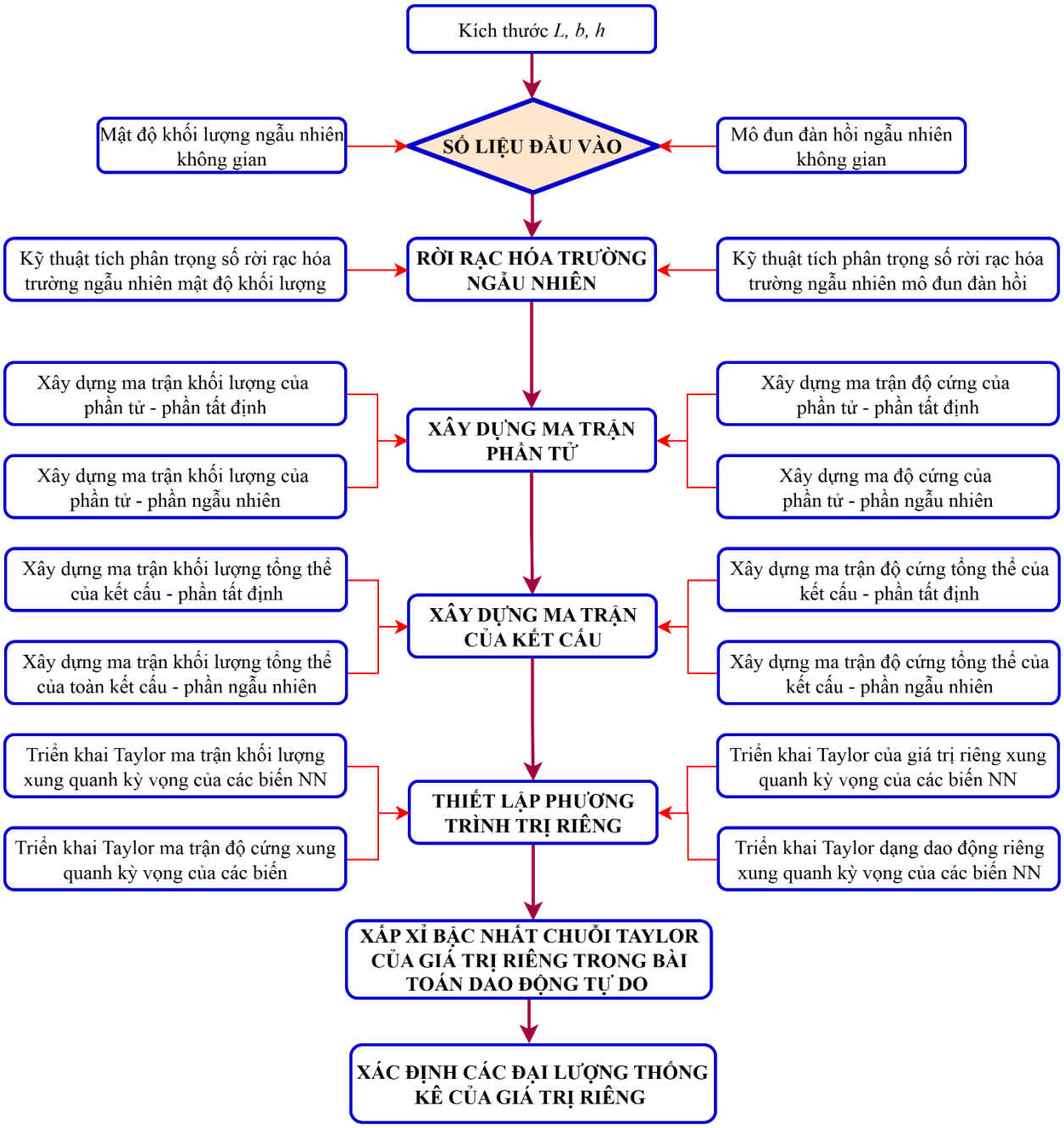
Tương tự cho bài toán ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu, khi nghiên cứu chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều hoặc chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều thì phương sai của trị riêng thứ *k* được xác định:

$$
Var\left[\lambda_k\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\left\{\begin{array}{l}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1}y_1^2 x_2^{i_2-1}y_2^2 R_{ff}\,dV_{e_1}dV_{e_2}\end{array}\right\} \tag{2.179}
$$

$$
Var\left[\lambda_k\right] = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{7}\sum_{i_2=1}^{7}\left\{\begin{array}{l}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\left\{\Phi_k^0\right\}^T\lambda_k^0\left[\Delta M_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\Phi_k^0\right\}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}\,dV_{e_1}dV_{e_2}\end{array}\right\} \tag{2.180}
$$

Để so sánh các chuỗi dữ liệu khác nhau thì COV của giá trị riêng được sử dụng để so sánh. COV xác định bằng tỉ số giữa độ lệch chuẩn của trị riêng và giá trị kỳ vọng như (2.181). Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên bằng SFEM thể hiện như Hình 2.7.

$$
\mathrm{COV} = \frac{\sqrt{Var\left[\lambda_k\right]}}{\mathbb{E}\left[\lambda_k\right]} \tag{2.181}
$$



Hình 2.7. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng SFEM

2.5. PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MÔ PHỎNG MONTE CARLO

Nội dung của phần này, một phương pháp thống kê được phát triển độc lập dựa trên FEM tiêu chuẩn kết hợp với biểu diễn phổ trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu để phân tích ứng xử của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Kết quả phân tích bằng MCS để kiểm chứng và xác thực kết quả phân tích bằng SFEM được đề xuất nghiên cứu và phát triển trong luận án này. Phương pháp MCS dựa trên việc tạo ra một tập hợp mẫu của các trường ngẫu nhiên của các biến đầu vào. Từ đó thực hiện phân tích ứng

xử của kết cấu trên tập mẫu đó thu được tập hợp các đáp ứng của kết cấu. Thực hiện xử lý số liệu thống kê trên tập hợp các đáp ứng của kết cấu thu được các đặc trưng thống kê đáp ứng của kết cấu. Phương pháp MCS tỏ ra là một công cụ mạnh mẽ nhưng khi bài toán phức tạp với số chiều tăng lên thì dẫn đến khối lượng tính toán lớn. Thời gian tính toán và chi phí tính toán vì vậy cũng tăng. Phương pháp MCS đòi hỏi tính toán với số lượng mẫu đủ lớn để tính toán các đại lượng thống kê hoặc xác suất phá hoại của kết cấu. Mặc dù vậy MCS vẫn được chấp nhận phổ biến như là một kỹ thuật độc lập để kiểm tra so sánh với các phương pháp khác khi phân tích ngẫu nhiên. Một vài kỹ thuật đã được phát triển với mục đích giảm số lượng mẫu khi mô phỏng để giảm thời gian và chi phí khi tính toán [65].

2.5.1. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên hai chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều dài nhịp L có E và ρ thay đổi ngẫu nhiên hai chiều. Mô đun đàn hồi của dầm là trường ngẫu nhiên dừng, hai chiều có hàm tự tương quan $R_{ff}\left(\xi_1,\xi_2\right)$ và hàm mật độ phổ công suất $S_{ff}\left(\kappa_1^f,\kappa_2^f\right)$ như các phương trình (2.182), (2.183) với σ_f là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên, d_x và d_y là chiều dài tương quan theo trục x dọc theo chiều dài dầm và chiều dài tương quan theo trục y dọc theo chiều cao dầm.

$$R_{ff}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\sigma_f^2\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}\right] \tag{2.182}$$

$$S_{ff}\left(\kappa_1^f,\kappa_2^f\right)=\sigma_f^2\frac{d_x d_y}{\pi^2\left(1+\left(\kappa_1^f d_x\right)^2\right)\left(1+\left(\kappa_2^f d_y\right)^2\right)} \tag{2.183}$$

Tương tự, hàm ngẫu nhiên hai chiều trong biểu diễn mật độ khối lượng có $R_{gg}\left(\xi_1,\xi_2\right)$ và $S_{gg}\left(\kappa_1^g,\kappa_2^g\right)$ như các phương trình (2.184), (2.185) với σ_g là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều.

$$R_{gg}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\sigma_g^2\exp\left[-\frac{\left|\xi_1\right|}{d_x}-\frac{\left|\xi_2\right|}{d_y}\right] \tag{2.184}$$

$$S_{gg}\left(\kappa_1^g,\kappa_2^g\right)=\sigma_g^2\frac{d_x d_y}{\pi^2\left(1+\left(\kappa_1^g d_x\right)^2\right)\left(1+\left(\kappa_2^g d_y\right)^2\right)} \tag{2.185}$$

Trong nghiên cứu này, trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi và trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng được xem xét có tương quan thông qua hệ số tương quan γ. Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên được biểu diễn dưới dạng chuỗi lượng giác hữu hạn như phương trình:

$$f(x,y)=\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l} A^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}x+\kappa^f_{2n_2}y+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}\right] \\ +B^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}x-\kappa^f_{2n_2}y+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\} \quad (2.186)$$

Trong đó:

+ $A^f_{n_1n_2}$ và $B^f_{n_1n_2}$: Biên độ của các sóng điều hòa được xác định dựa vào hàm mật độ phổ công suất của trường ngẫu nhiên;

+ $\kappa^f_{1n_1}$ và $\kappa^f_{2n_2}$: Tần số không gian tương ứng trục *x*, *y*;

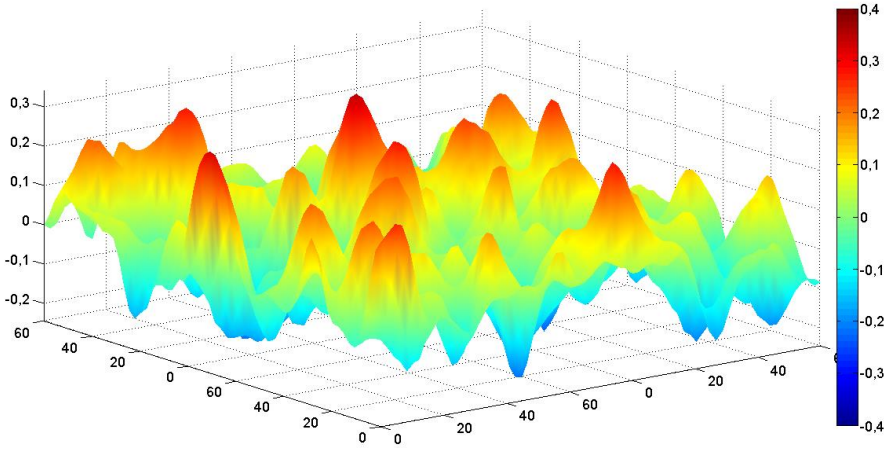
+ $\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}$ và $\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}$: Các góc pha ngẫu nhiên;

+ N_1 và N_2: là số lượng các khoảng chia trên miền tần số không gian.

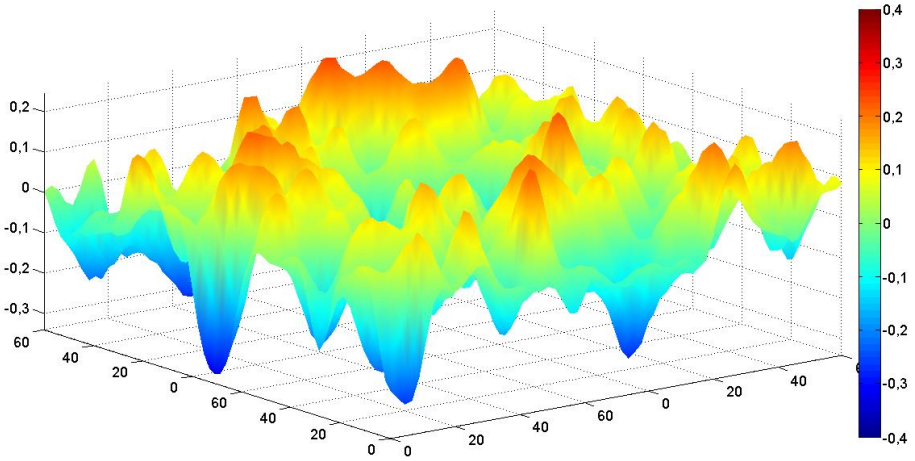
Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên của mật độ khối lượng được biểu diễn như phương trình (2.187).

$$\begin{aligned} g(x,y)=\gamma\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l} A^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}x+\kappa^f_{2n_2}y+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}\right] \\ +B^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}x-\kappa^f_{2n_2}y+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\} \\ +\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l} A^g_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}x+\kappa^g_{2n_2}y+\Phi^{(1g)}_{n_1n_2}\right] \\ +B^g_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}x-\kappa^g_{2n_2}y+\Phi^{(2g)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\} \end{aligned} \quad (2.187)$$

Sử dụng phương trình (2.186) và phương trình (2.187) biểu diễn một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên *f(x,y)* và *g(x,y)* trong trường hợp $\sigma_g = \sigma_f = 0{,}1$ và chiều dài tương quan $d_x = d_y = 4$, hệ số tương quan $\gamma = -1$ kết quả thể hiện như Hình 2.8 và Hình 2.9.



Hình 2.8. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên *f(x,y)*



Hình 2.9. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên *g(x,y)*

2.5.2. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên ba chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ

Để mô tả tính ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên theo không gian ba chiều. Biểu thức toán học của mô đun đàn hồi được biểu diễn như phương trình (2.188) với $f\left(x,y,z\right)$ là trường ngẫu nhiên ba chiều dừng, có kỳ vọng bằng không và độ lệch chuẩn σ_f. Do phân phối Gaussian có miền giá trị không bị chặn, biểu diễn (2.188) không bảo đảm tuyệt đối $E(x,y,z)>0$ đối với mọi hiện thực. Trong phạm vi độ phân tán nhỏ và vừa được khảo sát trong luận án, mô hình Gaussian được xem là một mô hình xấp xỉ của sự biến thiên tính chất vật liệu.

$$E\left(x,y,z\right)=E_0\left[1+f\left(x,y,z\right)\right] \tag{2.188}$$

Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ để tạo ra các hàm mẫu của trường ngẫu nhiên. Đối với trường ngẫu nhiên Gaussian, ba chiều, dừng được biểu diễn như (2.189):

$$f\left(x,y,z\right)=\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2n_3}^{(1f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x+\kappa_{2n_2}^{f}y+\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(1f)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(2f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x+\kappa_{2n_2}^{f}y-\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(2f)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(3f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x-\kappa_{2n_2}^{f}y+\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(3f)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(4f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x-\kappa_{2n_2}^{f}y-\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(4f)}\right]\end{array}\right\} \tag{2.189}$$

Trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng và trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi tương quan với nhau thông qua hệ số tương quan γ. Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được biểu diễn dưới dạng tổng hữu hạn của các hàm cosine như phương trình sau:

$$g\left(x,y,z\right)=\gamma\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2n_3}^{(1f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x+\kappa_{2n_2}^{f}y+\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(1f)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(2f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x+\kappa_{2n_2}^{f}y-\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(2f)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(3f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x-\kappa_{2n_2}^{f}y+\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(3f)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(4f)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{f}x-\kappa_{2n_2}^{f}y-\kappa_{3n_3}^{f}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(4f)}\right]\end{array}\right\}$$
$$+\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2n_3}^{(1g)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{g}x+\kappa_{2n_2}^{g}y+\kappa_{3n_3}^{g}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(1g)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(2g)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{g}x+\kappa_{2n_2}^{g}y-\kappa_{3n_3}^{g}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(2g)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(3g)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{g}x-\kappa_{2n_2}^{g}y+\kappa_{3n_3}^{g}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(3g)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(4g)}\cos\left[\kappa_{1n_1}^{g}x-\kappa_{2n_2}^{g}y-\kappa_{3n_3}^{g}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(4g)}\right]\end{array}\right\} \quad (2.190)$$

2.5.3. Phân tích đáp ứng tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

Trong bối cảnh của FEM, kết cấu dầm được phân chia thành N_e phần tử với E của phần tử ngẫu nhiên dọc theo chiều dài và chiều cao của phần tử như công thức (2.191) đối với bài toán E thay đổi ngẫu nhiên hai chiều và như phương trình (2.192) trong trường hợp E thay đổi ngẫu nhiên ba chiều.

$$E=E_0\left[1+f_e\left(x,y\right)\right] \quad (2.191)$$

$$E=E_0\left[1+f_e\left(x,y,z\right)\right] \quad (2.192)$$

Thay phương trình (2.186) vào phương trình (2.191) và viết lại theo hệ tọa độ của phần tử ta thu được phương trình (2.193) là E của phần tử với x_e và y_e là tọa độ phần tử, Δ_e là khoảng cách từ gốc tọa độ tổng thể đến gốc tọa độ phần tử thứ e của bài toán.

$$E=E_0\left[1+\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\Phi_{n_1n_2}^{(1)}\right]+\\B_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\Phi_{n_1n_2}^{(2)}\right]\end{array}\right\}\right] \quad (2.193)$$

Tương tự cho bài toán mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, mô đun đàn hồi của phần tử được xác định như phương trình (2.194).

$$E(x,y,z)=E_0\left(1+\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A^{(1)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(1)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(2)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e-\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(2)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(3)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(3)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(4)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e-\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(4)}_{n_1n_2n_3}\right]\end{array}\right\}\right) \tag{2.194}$$

Ma trận độ cứng của phần tử được xác định như phương trình sau:

$$[K]_e=\int_{V_e}[B]^T[D][B]dV_e \tag{2.195}$$

Thay phương trình (2.193) vào phương trình (2.195) thu được ma trận độ cứng của phần tử trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như (2.196). Ma trận $[K]_e$ bao gồm hai thành phần: Phần tiền định là $[K_0]_e$ và phần ngẫu nhiên là $[\Delta K_0]_e$.

$$\begin{aligned}[K]_e&=\underbrace{\int_{V_e}[B]^T E_0[B]dV_e}_{[K_0]_e}\\&+\underbrace{\int_{V_e}[B]^T E_0\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\Phi^{(1)}_{n_1n_2}\right]+\\B_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\Phi^{(2)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\}[B]dV_e}_{[\Delta K]_e}\end{aligned} \tag{2.196}$$

Tương tự cho trường E của dầm thay đổi ngẫu nhiên ba chiều, $[K]_e$ của phần tử được xác định như phương trình (2.197) khi thay (2.194) vào (2.195).

$$\begin{aligned}[K]_e&=\underbrace{\int_{V_e}[B]^T E_0[B]dV_e}_{[K_0]_e}\\&+\underbrace{\int_{V_e}[B]^T E_0\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A^{(1)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(1)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(2)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e-\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(2)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(3)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(3)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(4)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e-\kappa_{3n_3}z_e+\Phi^{(4)}_{n_1n_2n_3}\right]\end{array}\right\}[B]dV_e}_{[\Delta K]_e}\end{aligned} \tag{2.197}$$

Sử dụng phương trình (2.186) hoặc (2.189) tạo ra N mẫu của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi, khi đó ma trận độ cứng của phần tử thứ e được tạo ra ở lần mô phỏng thứ i được xác định như phương trình (2.198).

$$[K]_{e,i}=[K_0]_{e,i}+[\Delta K]_{e,i} \tag{2.198}$$

$[K]^i$ ở lần mô phỏng thứ *i* được thiết lập dựa trên ma trận $[K]_e$ như (2.199).

$$[K]^i = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_{e,i}^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_{e,i}^{Ext} \tag{2.199}$$

Phương trình cân bằng kết cấu ở lần mô phỏng thứ *i* được thiết lập theo FEM như (2.200) với $\{U\}^i$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể của toàn kết cấu.

$$[K]^i \{U\}^i = \{P\} \tag{2.200}$$

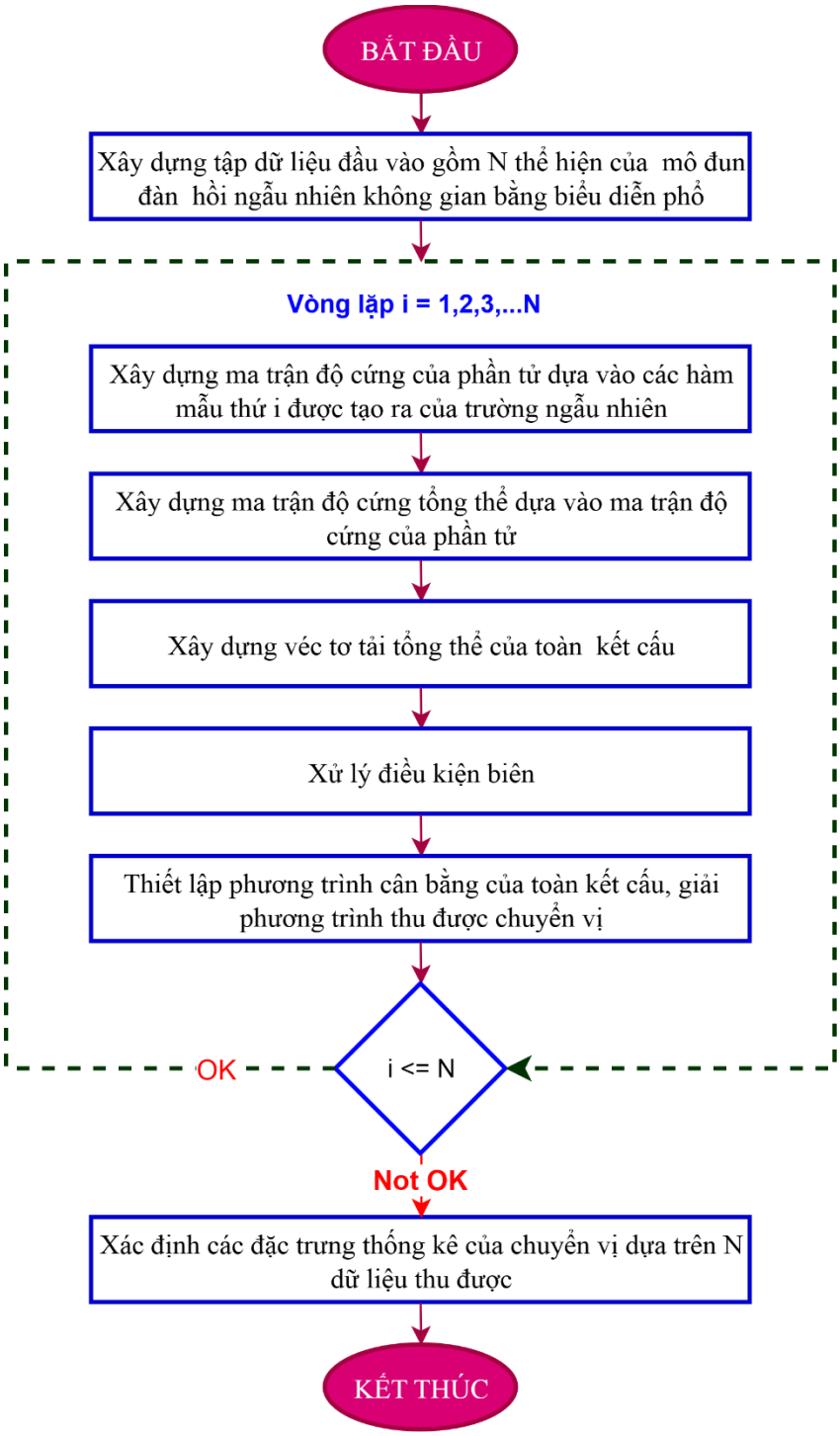
Xử lý điều kiện biên sau đó giải hệ phương trình thu được véc tơ chuyển vị nút của kết cấu ở lần mô phỏng thứ *i*. Thực hiện tính lặp trên không gian mẫu của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi được tạo ra thu được tập dữ liệu đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Xử lý thống kê trên tập hợp số liệu thu được các đặc trưng thống kê của chuyển vị nút thứ *j*: trung bình mẫu như phương trình (2.201) và phương sai mẫu như (2.202).

$$\overline{U}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} U_j^i \tag{2.201}$$

$$s_{U_j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(U_j^i - \overline{U}_j \right)^2 \tag{2.202}$$

Trong trường hợp để so sánh mức độ biến thiên tương đối của những tập dữ liệu khác nhau, đặc trưng thống kê được sử dụng trong trường hợp này là COV được xác định như (2.203) bằng tỷ số giữa độ lệch chuẩn của mẫu và trung bình mẫu. Hình 2.10 trình bày sơ đồ tổng quát phân tích tĩnh ngẫu nhiên dầm bằng mô phỏng MCS

$$\text{COV} = \frac{\sqrt{s_{U_j}^2}}{\left| \overline{U}_j \right|} \tag{2.203}$$



Hình 2.10. Sơ đồ tổng quát phân tích tĩnh ngẫu nhiên bằng MCS

2.5.4. Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

E và ρ của dầm được biểu diễn dưới dạng tổng chuỗi hữu hạn ngẫu nhiên như các phương trình (2.204) và phương trình (2.205) cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều. Đối với bài toán tính chất đặc trưng của vật liệu ngẫu nhiên ba chiều, E và ρ được biểu diễn dưới dạng chuỗi ngẫu nhiên như phương trình (2.206) và (2.207):

$$E\left(x_e,y_e\right)=E_0\left[1+\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}\right]\\+B^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\}\right] \tag{2.204}$$

$$\rho\left(x_e,y_e\right)=\rho_0\left[\begin{array}{l}1+\gamma\left(\dfrac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}\right]\\+B^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\}\\+\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A^g_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^g_{2n_2}y_e+\Phi^{(1g)}_{n_1n_2}\right]\\+B^g_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^g_{2n_2}y_e+\Phi^{(2g)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\}\end{array}\right] \tag{2.205}$$

$$E\left(x_e,y_e,z_e\right)=E_0\left[1+\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A^{(1f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(2f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e-\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(3f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(3f)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(4f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e-\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(4f)}_{n_1n_2n_3}\right]\end{array}\right\}\right] \tag{2.206}$$

$$\rho\left(x_e,y_e,z_e\right)=\rho_0\left[\begin{array}{l}1+\gamma\left(\dfrac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A^{(1f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(2f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e-\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(3f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(3f)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(4f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e-\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(4f)}_{n_1n_2n_3}\right]\end{array}\right\}\\+\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A^{(1g)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^g_{2n_2}y_e+\kappa^g_{3n_3}z_e+\Phi^{(1g)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(2g)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^g_{2n_2}y_e-\kappa^g_{3n_3}z_e+\Phi^{(2g)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(3g)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^g_{2n_2}y_e+\kappa^g_{3n_3}z_e+\Phi^{(3g)}_{n_1n_2n_3}\right]\\+A^{(4g)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^g_{2n_2}y_e-\kappa^g_{3n_3}z_e+\Phi^{(4g)}_{n_1n_2n_3}\right]\end{array}\right\}\end{array}\right] \tag{2.207}$$

Thay phương trình (2.204) vào phương trình (2.134) với ma trận độ cứng [*D*] bằng mô đun đàn hồi $E(x_e,y_e)$ thu được ma trận $[K]_e$ trong trường hợp *E* ngẫu nhiên hai chiều như (2.208) với Δ_e là khoảng cách từ đầu dầm đến phần tử thứ *e*.

$$\begin{aligned}\left[K\right]_e&=\underbrace{\int_{V_e}\left[B\right]^T E_0\left[B\right]dV_e}_{\left[K_0\right]_e}\\&+\underbrace{\int_{V_e}\left[B\right]^T E_0\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}\right]\\+B^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}\right]\end{array}\right\}\left[B\right]dV_e}_{\left[\Delta K\right]_e}\end{aligned} \tag{2.208}$$

$[M]_e$ trong trường hợp mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và có tương quan đến mô đun đàn hồi được xác định như phương trình (2.209) khi thay phương trình (2.205) vào phương trình (2.135).

$$[M]_e = \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 [N]^T [N] dV_e}_{[M_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 \begin{bmatrix} \gamma\left(\frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\begin{Bmatrix} A^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2}\right] \\ +B^f_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2}\right]\end{Bmatrix} + \\ \sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\begin{Bmatrix} A^g_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^g_{2n_2}y_e+\Phi^{(1g)}_{n_1n_2}\right] \\ +B^g_{n_1n_2}\cos\left[\kappa^g_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^g_{2n_2}y_e+\Phi^{(2g)}_{n_1n_2}\right]\end{Bmatrix} \end{bmatrix} [N]^T [N] dV_e}_{[\Delta M]_e} \tag{2.209}$$

Tương tự, khi nghiên cứu tính chất đặc trưng của vật liệu thay đổi ngẫu nhiên ba chiều ma trận độ cứng của phần tử và ma trận khối lượng của phần tử được xác định như các phương trình sau:

$$[K]_e = \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 [B] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 \sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\begin{Bmatrix} A^{(1f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e+\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(1f)}_{n_1n_2n_3}\right] \\ +A^{(2f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa^f_{2n_2}y_e-\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(2f)}_{n_1n_2n_3}\right] \\ +A^{(3f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e+\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(3f)}_{n_1n_2n_3}\right] \\ +A^{(4f)}_{n_1n_2n_3}\cos\left[\kappa^f_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa^f_{2n_2}y_e-\kappa^f_{3n_3}z_e+\Phi^{(4f)}_{n_1n_2n_3}\right]\end{Bmatrix} [B] dV_e}_{[\Delta K]_e} \tag{2.210}$$

$$[M]_e = \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 [N]^T [N] dV_e}_{[M_0]_e}$$

$$+ \int_{V_e} \rho_0 \underbrace{\left[\begin{array}{l} \gamma \left(\dfrac{\sigma_g}{\sigma_f} \right) \sqrt{2} \displaystyle\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{array}{l} A^{(1f)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^f_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa^f_{2n_2} y_e + \kappa^f_{3n_3} z_e + \Phi^{(1f)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \\ + A^{(2f)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^f_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa^f_{2n_2} y_e - \kappa^f_{3n_3} z_e + \Phi^{(2f)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \\ + A^{(3f)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^f_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa^f_{2n_2} y_e + \kappa^f_{3n_3} z_e + \Phi^{(3f)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \\ + A^{(4f)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^f_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa^f_{2n_2} y_e - \kappa^f_{3n_3} z_e + \Phi^{(4f)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \end{array} \right\} + \\ \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \displaystyle\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{array}{l} A^{(1g)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^g_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa^g_{2n_2} y_e + \kappa^g_{3n_3} z_e + \Phi^{(1g)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \\ + A^{(2g)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^g_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa^g_{2n_2} y_e - \kappa^g_{3n_3} z_e + \Phi^{(2g)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \\ + A^{(3g)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^g_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa^g_{2n_2} y_e + \kappa^g_{3n_3} z_e + \Phi^{(3g)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \\ + A^{(4g)}_{n_1 n_2 n_3} \cos\left[\kappa^g_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa^g_{2n_2} y_e - \kappa^g_{3n_3} z_e + \Phi^{(4g)}_{n_1 n_2 n_3} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right]}_{[\Delta M]_e} [N]^T [N] dV_e$$

(2.211)

Ma trận độ cứng phần tử và ma trận khối lượng phần tử bao gồm hai thành phần. Thành phần thứ nhất được xác định tương tự trường hợp dầm có tính chất vật liệu không thay đổi và thành phần thứ hai là thành phần ngẫu nhiên. Theo FEM, ma trận [*K*] và ma trận [*M*] được xây dựng từ $[K]_e$ và ma trận $[M]_e$. Để ý đến các phương trình (2.208) - (2.211) ma trận độ cứng tổng thể được xác định như phương trình (2.212), ma trận khối lượng tổng thể được xác định như phương trình (2.213).

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} \tag{2.212}$$

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta M]_e^{Ext} \tag{2.213}$$

Thay các phương trình (2.212), (2.213) vào phương trình (2.138) với giá trị riêng $\lambda = \omega^2$ thu được phương trình sau:

$$Det\left[\left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} \right) - \lambda \left(\sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta M]_e^{Ext} \right) \right] = 0 \tag{2.214}$$

Sử dụng các phương trình (2.204) và (2.205) tạo ra *N* mẫu của trường ngẫu nhiên *E* và ρ ngẫu nhiên hai chiều. Xây dựng ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử như các phương trình (2.208) và phương trình (2.209) từ đó có thể xác định được ma trận độ cứng tổng thể và ma trận khối lượng tổng thể của toàn kết cấu như (2.212) và (2.213). Tương tự khi nghiên cứu tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian ba chiều, các trường ngẫu nhiên *E* và ρ được tạo ra *N* mẫu từ (2.206) và (2.207). Ma trận độ cứng và ma trận

khối lượng của phần tử có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định từ (2.210) và (2.211). Sử dụng (2.214) để xác định giá trị riêng ở lần mô phỏng thứ *i* theo (2.215).

$$Det\left[\left(\sum_{e=1}^{N_e}\left[K_0\right]_{e,i}^{Ext}+\sum_{e=1}^{N_e}\left[\Delta K\right]_{e,i}^{Ext}\right)-\lambda^i\left(\sum_{e=1}^{N_e}\left[M_0\right]_{e,i}^{Ext}+\sum_{e=1}^{N_e}\left[\Delta M\right]_{e,i}^{Ext}\right)\right]=0 \quad (2.215)$$

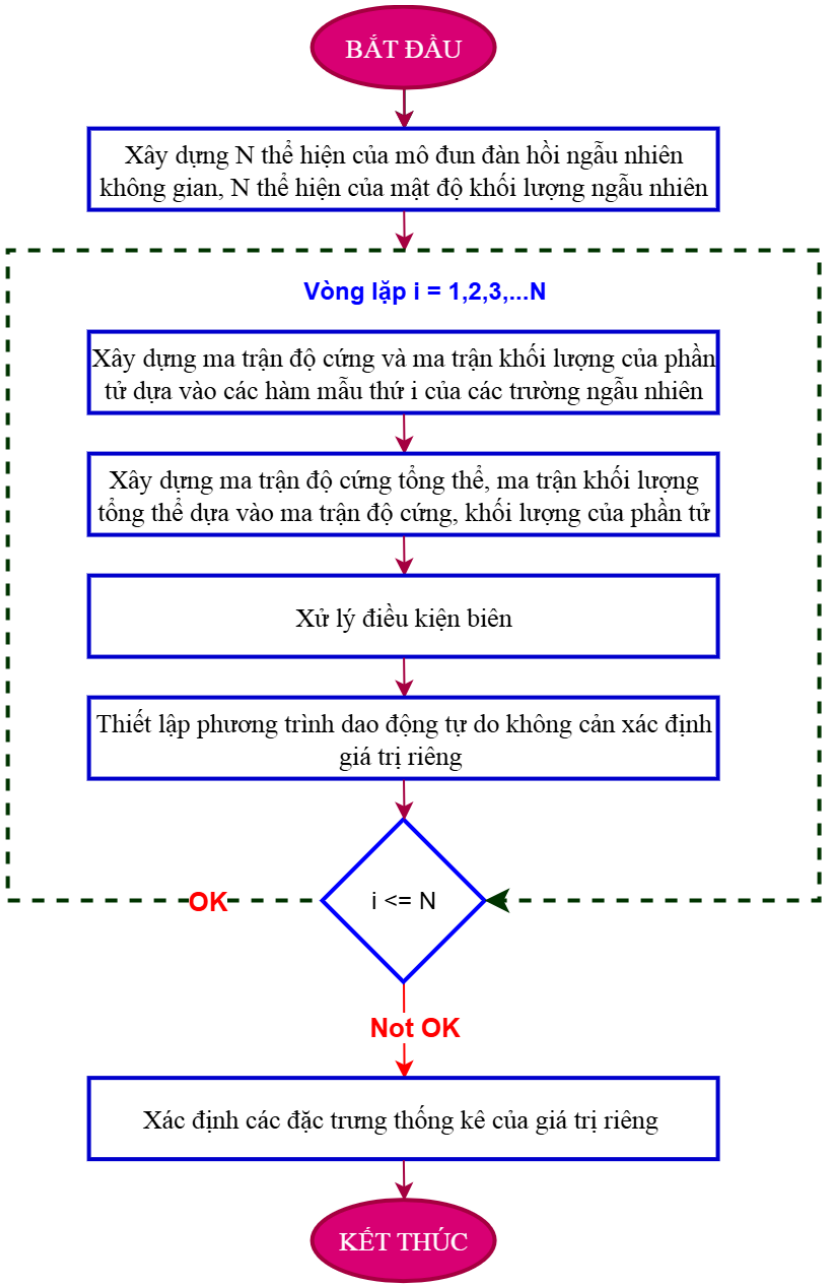
Sử dụng phương trình (2.215) thu được giá trị riêng thứ *k* ở lần mô phỏng thứ *i* là λ_k^i. Phân tích trên tập mẫu của trường ngẫu nhiên *E* và ρ tạo ra thu được *N* giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Xử lý số liệu thống kê trên tập dữ liệu thu được có thể xác định được giá trị trung bình và phương sai mẫu của giá trị riêng thứ *k* như các phương trình sau:

$$\bar{\lambda}_k=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_k^i \quad (2.216)$$

$$s_{\lambda_k}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_k^i-\bar{\lambda}_k\right)^2 \quad (2.217)$$

Trong trường hợp để so sánh mức độ biến thiên tương đối của những tập dữ liệu khác nhau, đặc trưng thống kê được sử dụng trong trường hợp này là COV được xác định như (2.218). Hình 2.11 thể hiện sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên của dầm bằng MCS.

$$\mathrm{COV}=\frac{\sqrt{s_{\lambda_k}^2}}{\bar{\lambda}_k} \quad (2.218)$$



Hình 2.11. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng MCS

2.6. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

2.6.1. Đánh giá hiệu ứng thứ cấp và cơ sở áp dụng mô hình dầm phẳng cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Sự biến thiên không gian của mô đun đàn hồi có thể gây dịch tâm đàn hồi và phát sinh ghép uốn hai phương, xoắn. Mục này so sánh mô hình dầm phẳng với mô hình dầm không gian có xét các thành phần ghép để đánh giá ảnh hưởng đến chuyển vị tĩnh và hai trị riêng uốn theo phương *y*. Hai mô hình được tính trên cùng hiện thực vật liệu bằng

phương pháp mô phỏng MCS. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian dẫn đến các đại lượng: độ cứng dọc trục, mô men tĩnh đàn hồi, mô men quán tính ly tâm đàn hồi, và độ cứng chống uốn của mặt cắt ngang là các trường ngẫu nhiên được xác định như các phương trình (2.219) - (2.224):

$$D_0(x,\theta) = \int_A E(x,y,z,\theta)dydz \tag{2.219}$$

$$S_y(x,\theta) = \int_A E(x,y,z,\theta)zdydz \tag{2.220}$$

$$S_z(x,\theta) = \int_A E(x,y,z,\theta)ydydz \tag{2.221}$$

$$D_{yz}(x,\theta) = \int_A E(x,y,z,\theta)yzdydz \tag{2.222}$$

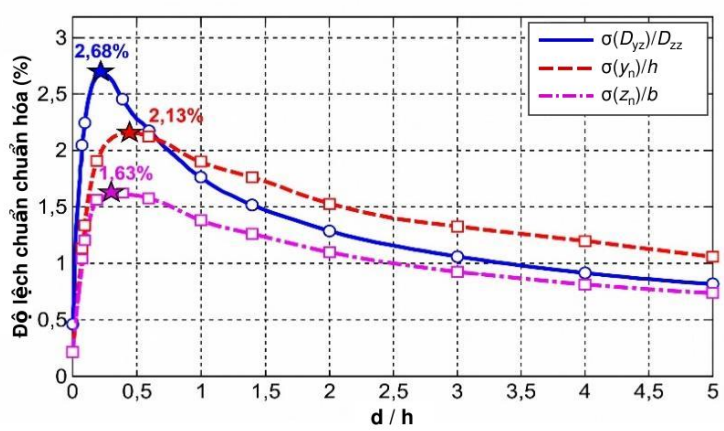
$$D_{zz}(x,\theta) = \int_A y^2 E(x,y,z,\theta)dydz \tag{2.223}$$

$$D_{yy}(x,\theta) = \int_A z^2 E(x,y,z,\theta)dydz \tag{2.224}$$

Trọng tâm đàn hồi của mặt cắt dịch chuyển theo phương đứng (y_n) và phương ngang (z_n):

$$y_n(x,\theta) = \frac{S_z(x,\theta)}{D_0(x,\theta)} \tag{2.225}$$

$$z_n(x,\theta) = \frac{S_y(x,\theta)}{D_0(x,\theta)} \tag{2.226}$$



Hình 2.12. Độ lệch chuẩn chuẩn hóa của các đặc trưng mặt cắt ngẫu nhiên

Vì mặt cắt ngang có tính đối xứng hình học và phân bố kỳ vọng của mô đun đàn hồi là đồng nhất, các đại lượng hiệu ứng thứ cấp sinh ra do tính ngẫu nhiên (z_n, y_n, D_{yz}) đều có giá trị kỳ vọng lý thuyết bằng không. Hình 2.12 khảo sát độ lệch chuẩn hóa theo các kích thước danh nghĩa của mặt cắt (z_n/b, y_n/h, D_{yz}/D_{zz}) phụ thuộc vào chiều dài tương quan. Kết quả cho thấy mức độ biến thiên của các hiệu ứng thứ cấp này là nhỏ, dù trường mô đun đàn hồi có hệ số biến thiên lên tới 20%. Sự biến động nhỏ này minh chứng rằng trong phân tích ngẫu nhiên, ảnh hưởng của biến động thứ cấp hoàn toàn có thể được xem là nguồn ngẫu nhiên nhiễu.

2.6.1.1. Đối chứng đối với bài toán tĩnh

Xét dầm công-xôn dài L = 5 m, tiết diện chữ nhật h = 0,4 *m*, b = 0,25 *m*, có E_0 = 30 × 10^9 *N/m²* và hệ số Poisson ν = 0,3. Lực P = 50 *kN* tác dụng theo phương y tại đầu tự do. Mô hình dầm phẳng chỉ xét uốn trong mặt phẳng theo độ cứng D_{zz}; mô hình dầm không gian xét ghép dọc–uốn, uốn hai phương và xoắn Saint-Venant cục bộ, bỏ qua biến dạng cắt do uốn và cản trở vênh. Do lực dọc N = 0, khử biến dạng dọc trong mô hình dầm không gian cho các độ cứng uốn hiệu chỉnh:

$$\begin{aligned} D_{yy}(x,\theta) &= D_{yy}(x,\theta) - \frac{S_y^2}{D_0(x,\theta)} \\ D_{zz}(x,\theta) &= D_{zz}(x,\theta) - \frac{S_z^2}{D_0(x,\theta)} \\ D_{yz}(x,\theta) &= D_{yz}(x,\theta) - \frac{S_y S_z}{D_0(x,\theta)} \end{aligned} \tag{2.227}$$

Các thành phần chuyển vị do uốn theo y, z và góc xoắn ϕ thỏa mãn:

$$\frac{d^2 w_B(x,\theta)}{dx^2} = \frac{P(L-x)D_{yy}(x,\theta)}{D_{zz}(x,\theta)D_{yy}(x,\theta) - D_{yz}^2(x,\theta)} \tag{2.228}$$

$$\frac{d^2 v_B(x,\theta)}{dx^2} = -\frac{P(L-x)D_{yz}(x,\theta)}{D_{zz}(x,\theta)D_{yy}(x,\theta) - D_{yz}^2(x,\theta)} \tag{2.229}$$

$$\frac{d\phi(x,\theta)}{dx} = \frac{P \times z_s(x,\theta)}{D_t(x,\theta)} \tag{2.230}$$

Độ cứng xoắn được tính cho từng tiết diện với $G = E/[2(1+\nu)]$. Đặt $Y = y - y_n$, $Z = z - z_n$; hàm vênh $\psi(x,Y,Z,\theta)$ được giải từ bài toán Saint-Venant bằng phần tử tứ giác và tích phân Gauss. Trong công thức sau, G được biểu diễn theo tọa độ (x,Y,Z):

$$D_t(x,\theta) = \int_A G(x,Y,Z,\theta)\left[(\psi_{,Y} - Z)^2 + (\psi_{,Z} + Y)^2\right] dA \tag{2.231}$$

Tâm cắt (y_s, z_s) được xác định từ bài toán tiết diện thông qua hệ thức tương hỗ, lấy tâm hình học O làm gốc tọa độ. Tâm cắt không nhất thiết trùng với tâm đàn hồi. Tải trọng tại đầu tự do tạo mô men xoắn đối với tâm cắt bằng $P \times z_s$. Tích phân theo chiều dài và dùng điều kiện ngàm tại x = 0 cho:

$$w_B(L,\theta) = \int_0^L \frac{P(L-x)^2 D_{yy}(x,\theta)}{D_{zz}(x,\theta)D_{yy}(x,\theta) - D_{yz}^2(x,\theta)} dx \tag{2.232}$$

$$v_B(L,\theta) = -\int_0^L \frac{P(L-x)^2 D_{yz}(x,\theta)}{D_{zz}(x,\theta)D_{yy}(x,\theta) - D_{yz}^2(x,\theta)} dx \tag{2.233}$$

$$\phi(L,\theta)=\int_0^L \frac{Pz_s(x,\theta)}{D_t(x,\theta)}dx \tag{2.234}$$

Khi kể đóng góp xoắn, chuyển vị tại đầu tự do của mô hình dầm đối chứng được xác định:

$$w_R = w_B(L,\theta)+\int_0^L \frac{Pz_s^2(x,\theta)}{D_t(x,\theta)}dx \tag{2.235}$$

$$v_R = v_B(L,\theta)-\int_0^L \frac{Py_s(x,\theta)z_s(x,\theta)}{D_t(x,\theta)}dx \tag{2.236}$$

Trong khi đó, chuyển vị theo phương *y* của mô hình dầm phẳng là:

$$w_P(L,\theta)=\int_0^L \frac{P(L-x)^2}{D_{zz}(x,\theta)}dx \tag{2.237}$$

Các đặc trưng tiết diện được xác định riêng cho từng đoạn vật liệu; kết quả được tích phân theo chiều dài dầm. Bảng 2.1 đến Bảng 2.3 trình bày thống kê từ khảo sát MCS tĩnh với COV danh nghĩa của E bằng 20% tại d/L = 0,01; 0,1 và 1. Sai khác tương đối của trung bình và độ lệch chuẩn chuyển vị đứng được lấy theo mô hình dầm không gian:

$$e_\mu = \frac{|w_P - w_R|}{|w_R|}\times 100\% \quad ; \quad s_\mu = \frac{|s_P - s_R|}{|s_R|}\times 100\% \tag{2.238}$$

Trong đó, $\overline{W}$ là trung bình mẫu và s là độ lệch chuẩn mẫu. Dấu "–" chỉ đại lượng không được mô hình phẳng xét đến.

Bảng 2.1. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và dầm đối chứng (d = 0,01L)

Chuyển vị	**Giá trị trung bình**			**Độ lệch chuẩn**		
	Dầm phẳng	Mô hình đối chứng	Sai khác (%)	Dầm phẳng	Mô hình đối chứng	Sai khác (%)
Đứng (*mm*),	52,3148	52,3370	0,0426	0,5849	0,5857	0,1365
Ngang (*mm*)	-	0,002886	-	-	0,5827	-
Góc xoắn	-	0,000003	-	-	0,00043	-

Bảng 2.2. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và dầm đối chứng (d = 0,1L)

Chuyển vị	**Giá trị trung bình**			**Độ lệch chuẩn**		
	Dầm phẳng	Mô hình đối chứng	Sai khác (%)	Dầm phẳng	Mô hình đối chứng	Sai khác (%)
Đứng (*mm*),	53,6461	53,6608	0,0274	4,9118	4,9157	0,0793
Ngang (*mm*)	-	0,003815	-	-	0,9676	-
Góc xoắn	-	0,000015	-	-	0,00172	-

Bảng 2.3. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và dầm đối chứng ($d = L$)

Chuyển vị	Giá trị trung bình			Độ lệch chuẩn		
	Dầm phẳng	Mô hình đối chứng	Sai khác (%)	Dầm phẳng	Mô hình đối chứng	Sai khác (%)
Đứng (*mm*),	54,4259	54,4262	0,0005	11,0210	11,0212	0,0018
Ngang (*mm*)	-	0,002153	-	-	0,2162	-
Góc xoắn	-	0,000004	-	-	0,00149	-

Kết quả trong Bảng 2.1–2.3 cho thấy tỷ số giữa độ lệch chuẩn chuyển vị ngang và trị tuyệt đối trung bình chuyển vị đứng của mô hình đối chứng nằm trong khoảng 0,3972–1,803%. Chỉ tiêu này đánh giá độ phân tán của chuyển vị ngang so với mức chuyển vị đứng chủ đạo. Đối với chuyển vị đứng, sai khác tương đối giữa hai mô hình về trung bình nhỏ hơn 0,05% và về độ lệch chuẩn nhỏ hơn 0,14%. Các kết quả đối sánh cung cấp bằng chứng định lượng cho thấy ảnh hưởng của những thành phần ghép được xét trong mô hình đối chứng lên các đặc trưng thống kê của chuyển vị đứng là nhỏ trong ba trường hợp khảo sát.

2.6.1.2. Đối chứng đối với bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính

Xét dao động tự do không cản của dầm công-xôn, giữ nguyên hình học và điều kiện biên của bài toán tĩnh, với khối lượng riêng trung bình ρ_0 = 2400 kg/m³. Mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng được mô hình hóa bằng hai trường ngẫu nhiên Gaussian ba chiều, cùng hệ số biến thiên COV = 20% và có hàm tự tương quan dạng mũ.

Mô hình dầm phẳng chỉ xét dao động uốn theo phương *y*, với độ cứng uốn $D_{zz} = \int Ey^2 dA$ và khối lượng trên đơn vị chiều dài $m = \int \rho dA$. Mô hình dầm không gian đối chứng xét biến dạng dọc, uốn hai phương và xoắn Saint-Venant. Ma trận độ cứng dọc–uốn của tiết diện được xác định theo biểu thức $C = \int Eaa^T dA$, trong đó $a = [1, z, -y]^T$; độ cứng xoắn được tính riêng cho từng tiết diện. Ma trận khối lượng nhất quán được xây dựng từ khối lượng phân bố trên tiết diện, bao gồm khối lượng tịnh tiến, các mô men khối lượng bậc nhất và mô men quán tính khối lượng cực. Qua đó, mô hình dầm đối chứng xét được hiệu ứng ghép tịnh tiến–xoắn khi tâm khối lượng không trùng với trục tham chiếu.

Hai trị riêng λ_1, λ_2 là của hai nhánh uốn đầu tiên theo phương *y*, không nhất thiết là hai trị riêng nhỏ nhất của toàn mô hình không gian. Sai khác tương đối về giá trị trung bình và COV của giá trị riêng được thể hiện trong Bảng 2.4 tổng hợp 10.000 cặp mẫu ở mỗi chiều dài tương quan.

Bảng 2.4. Sai khác tương đối về giá trị trung bình và COV của hai giá trị riêng uốn theo phương *y*

d/L	Số mẫu N	Sai khác giá trị trung bình λ_1 (%)	Sai khác COV λ_1 (%)	Sai khác giá trị trung bình λ_2 (%)	Sai khác COV λ_2 (%)
0,01	10.000	0,3329	0,3219	0,3412	0,3262
0,1	10.000	0,4673	0,5188	0,4944	0,5285
1	10.000	0,0653	0,0627	0,0701	0,0595

Trong các trường hợp của dầm công-xôn đã khảo sát, sai khác tương đối lớn nhất giữa mô hình dầm phẳng và mô hình dầm không gian đối chứng về giá trị trung bình và COV của hai trị riêng thuộc hai nhánh uốn theo phương *y* lần lượt là 0,4944% và 0,5285%. Ảnh hưởng của các hiệu ứng thứ cấp đến hai giá trị riêng của dạng dao động uốn theo phương *y* là nhỏ trong phạm vi nghiên cứu của luận án.

2.6.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên đáp ứng của dầm theo mật độ lưới chia phần tử

Xét dầm giản đơn có chiều dài nhịp $L = 5\ m$, mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao $h = 0{,}4\ m$, bề rộng $b = 0{,}25\ m$. Dầm chịu tải trọng phân bố đều $q = 10\ kN/m$. Dầm có E và ρ thay đổi ngẫu nhiên không gian có hàm tự hiệp phương sai như các phương trình (2.239) - (2.242). Với giá trị kỳ vọng của E và ρ lần lượt: $E_0 = 30\times10^9\ N/m^2$, $\rho_0 = 2400\ kg/m^3$. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian $\sigma_f = \sigma_g = 0{,}05$. Các chiều dài tương quan theo các trục trong không gian $d_x = d_y = d_z = d$, thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$.

$$C_{EE}\left(\xi_1,\xi_2\right) = E_0^2\sigma_f^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x}-\frac{|\xi_2|}{d_y}\right] \tag{2.239}$$

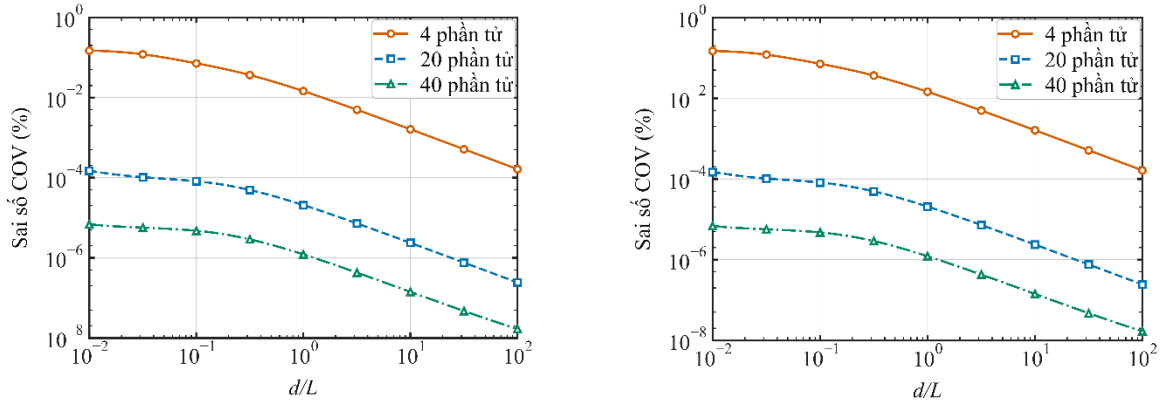
$$C_{EE}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) = E_0^2\sigma_f^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x}-\frac{|\xi_2|}{d_y}-\frac{|\xi_3|}{d_z}\right] \tag{2.240}$$

$$C_{\rho\rho}\left(\xi_1,\xi_2\right) = \rho_0^2\sigma_g^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x}-\frac{|\xi_2|}{d_y}\right] \tag{2.241}$$

$$C_{\rho\rho}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) = \rho_0^2\sigma_g^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x}-\frac{|\xi_2|}{d_y}-\frac{|\xi_3|}{d_z}\right] \tag{2.242}$$

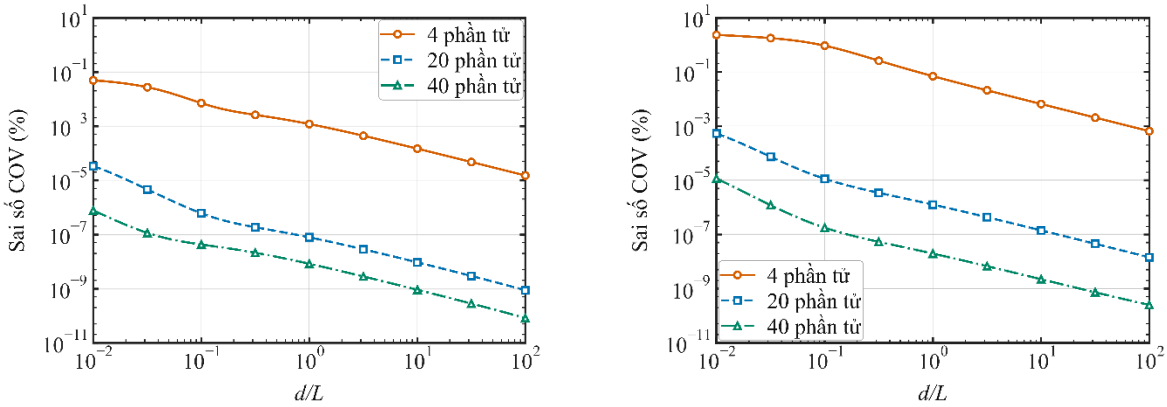
Sử dụng phương pháp SFEM được phát triển trong Chương II, COV của chuyển vị tại vị trí giữa nhịp được xác định cho hai trường hợp: mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều. Bên cạnh đó, các giá trị riêng của dầm giản đơn có E và ρ ngẫu nhiên không

gian cũng được phân tích. Các tính toán được thực hiện với số phần tử: N_e = 4, N_e = 20, N_e = 40 và N_e = 80. Lưới 80 phần tử được chọn làm tham chiếu để xác định sai số tương đối của COV. Hình 2.13 thể hiện sai số tương đối của COV chuyển vị; Hình 2.14 và Hình 2.15 thể hiện sự hội tụ của COV giá trị riêng. Kết quả cho thấy sai số tương đối của COV giảm rõ rệt khi tăng số phần tử, trong đó sai khác giữa lưới 40 và 80 phần tử là rất nhỏ trong phạm vi khảo sát. Điều này cho thấy COV của các đáp ứng đã ổn định theo mức độ tinh chỉnh lưới. Vì vậy, lưới (N_e = 40) được lựa chọn cho các phân tích tiếp theo nhằm cân bằng giữa mức độ hội tụ và chi phí tính toán.



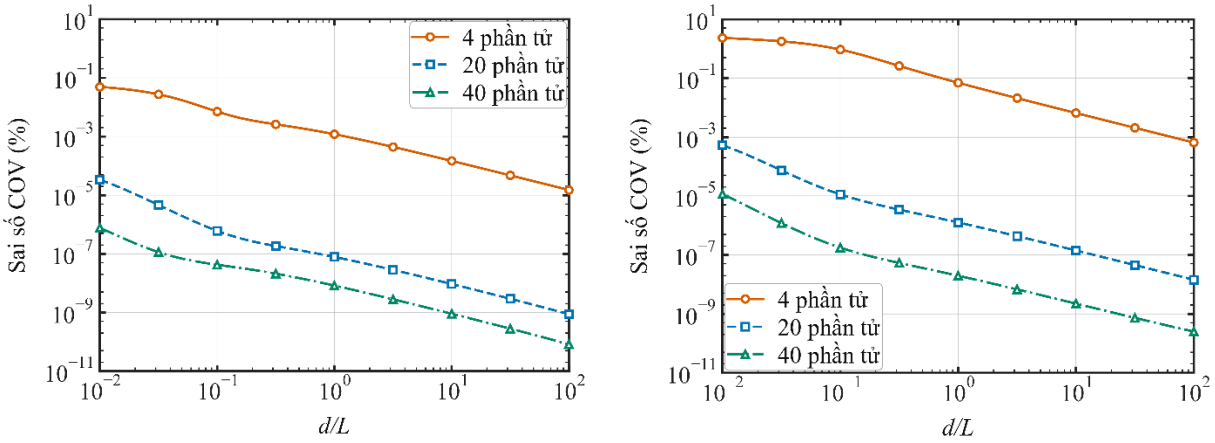
a. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều *b. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều*

Hình 2.13. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của chuyển vị giữa nhịp, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử



a. Giá trị riêng thứ nhất (λ_1) *b. Giá trị riêng thứ hai (λ_2)*

Hình 2.14. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của giá trị riêng khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử



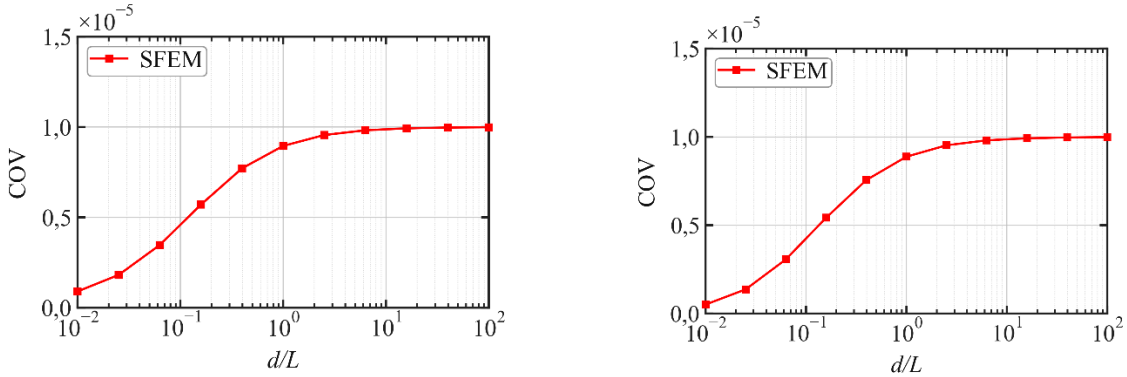
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.15. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của giá trị riêng khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử

2.6.3. Kiểm tra mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên

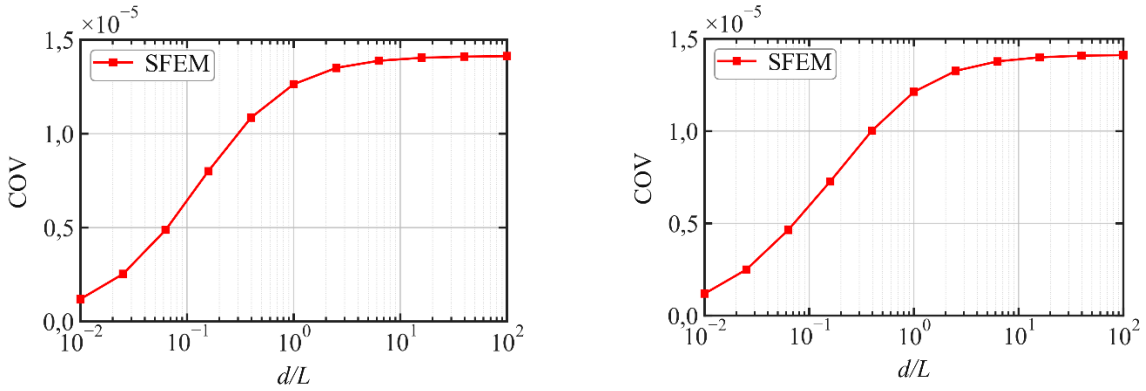
Theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên, khi mức độ biến động của các tham số đầu vào nhỏ, bài toán ngẫu nhiên sẽ tiến gần đến bài toán tất định. Khi đó, thành phần ngẫu nhiên của kết cấu được dự đoán hội tụ về giá trị vô cùng nhỏ. Để kiểm chứng nhận định này, độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên đầu vào được chọn là $\sigma_f = \sigma_g = 0{,}00001$. Phương pháp SFEM được phát triển trong Chương II được sử dụng để phân tích COV của chuyển vị và các giá trị riêng.

Kết quả phân tích được thể hiện trong Hình 2.16 đến Hình 2.18 cho thấy COV của chuyển vị và COV của giá trị riêng đều biến thiên rất nhỏ khi độ ngẫu nhiên của các tham số đầu vào giảm. Nói cách khác, đáp ứng của dầm gần như mang tính tất định. Kết quả xác nhận tính nhất quán của mô hình trong giới hạn biến thiên đầu vào tiến về không.



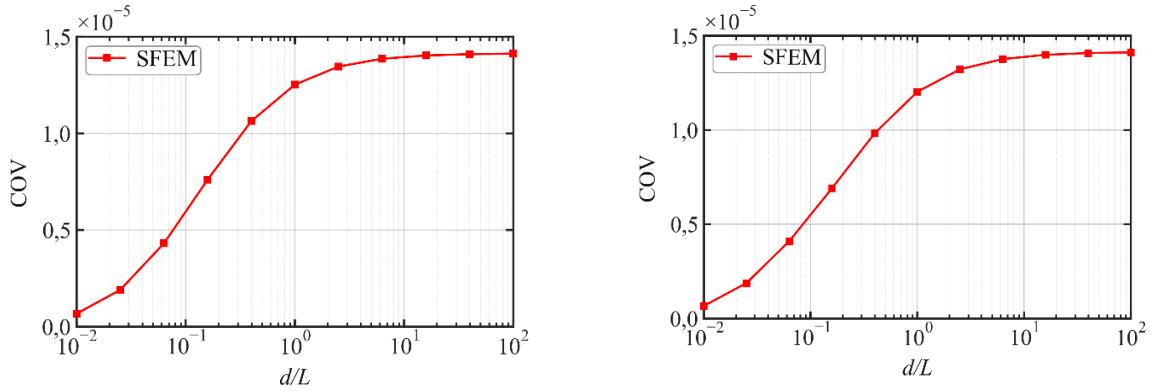
a. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều *b. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều*

Hình 2.16. COV của chuyển vị khi yếu tố ngẫu nhiên đầu vào có độ lệch nhỏ



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.17. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.18. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

2.6.4. Kiểm chứng mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố

2.6.4.1. Kiểm chứng bài toán phân tích ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Trong tài liệu [16], Adhikari và Mukherjee đã đề xuất một phương pháp phân tích dựa trên cách tiếp cận của Castigliano thay cho công thức biến phân truyền thống, nhằm xác định ma trận độ cứng của phần tử dầm có các tham số tính chất của vật liệu bất định biến đổi ngẫu nhiên theo không gian một chiều kết hợp với mô phỏng MCS để phân tích tĩnh ngẫu nhiên. Dựa trên kết quả được công bố trong nghiên cứu này, kỳ vọng và độ lệch chuẩn của chuyển vị được xác định bằng SFEM được so sánh trong điều kiện tương tự. Cụ thể, chiều dài tương quan theo trục x được chọn bằng $L/10$ (giá trị sử dụng trong tài liệu [16]), trong khi chiều dài tương quan theo các phương y và z được giả thiết rất lớn ($100L$) để mô phỏng trường ngẫu nhiên gần như chỉ biến thiên theo một chiều không gian. Theo

lý thuyết trường ngẫu nhiên, khi chiều dài tương quan theo một phương đủ lớn so với kích thước hình học của miền khảo sát, trường ngẫu nhiên được xem là gần như đồng nhất theo phương đó, tức là không có sự biến thiên ngẫu nhiên đáng kể trong hướng có chiều dài tương quan rất lớn [51], [52]. Điều này cho phép thực hiện so sánh trực tiếp với bài toán một chiều được trình bày trong tài liệu [16] của Adhikari và Mukherjee, trong khi vẫn duy trì khung mô hình trường ngẫu nhiên không gian tổng quát được phát triển trong luận án.

Xét dầm một đầu ngàm, một đầu tự do có các kích thước hình học: chiều dài nhịp $L = 1\ m$, $h = 0{,}03\ m$, $b = 0{,}003\ m$. Mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên: một chiều, hai chiều, ba chiều với giá trị kỳ vọng $E_0 = 69\times10^9\ N/m^2$. Dầm chịu tác dụng của lực tập trung tại đầu tự do. Trường ngẫu nhiên được xem xét là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng. Sử dụng phương pháp SFEM được phát triển nghiên cứu trong luận án này để phân tích kỳ vọng và độ lệch chuẩn của chuyển vị chuẩn hóa (chuyển vị do mô đun đàn hồi ngẫu nhiên chia cho chuyển vị của bài toán tất định) tại đầu tự do của dầm công-xôn đối chiếu với kết quả phân tích được công bố trong tài liệu [16] được thể hiện trong Bảng 2.5 và Bảng 2.6.

Bảng 2.5. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác

Mô đun đàn hồi	σ_f **= 0,05**	σ_f **= 0,10**	σ_f **= 0,15**	σ_f **= 0,20**
NN một chiều ($d_x = L/10$), [16]	1,0024	1,0049	1,0073	1,0097
NN hai chiều ($d_x = L/10$, $d_y = 100L$) [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
NN ba chiều ($d_x = L/10$, $d_y = d_z = 100L$), [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Sai số (%)	**0,24**	**0,49**	**0,73**	**0,97**

Bảng 2.6. So sánh độ lệch chuẩn của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác

Mô đun đàn hồi	σ_f **= 0,05**	σ_f **= 0,10**	σ_f **= 0,15**	σ_f **= 0,20**
NN một chiều ($d_x = L/10$) [16]	0,0268	0,0535	0,0803	0,1071
NN hai chiều ($d_x = L/10$, $d_y = 100L$) [Luận án]	0,0265	0,0531	0,0797	0,1063
NN ba chiều ($d_x = L/10$, $d_y = d_z = 100L$) [Luận án]	0,0265	0,0531	0,0797	0,1063
Sai số (%)	**1,1194**	**0,7477**	**0,7472**	**0,7470**

Trong nghiên cứu này chuyển vị của dầm được xấp xỉ dưới dạng chuỗi Taylor bậc nhất của các biến ngẫu nhiên được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng bằng không. Do đó giá trị kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa được xác định bằng SFEM sẽ bằng 1 không phụ thuộc vào chiều dài tương quan trong không gian cũng như độ

lệch chuẩn của mô đun đàn hồi. Kết quả so sánh cho thấy phương pháp SFEM được đề xuất phù hợp và đảm bảo tính chính xác khi phân tích ngẫu nhiên dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian.

2.6.4.2. Kiểm chứng bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Trong tài liệu [63] Hosseini và Khadem đã nghiên cứu giá trị riêng thứ nhất của bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm công-xôn quay quanh một trục với tốc độ quay là biến ngẫu nhiên, các tính chất vật liệu và kích thước hình học ngẫu nhiên một chiều. Nhóm tác giả sử dụng phương pháp rời rạc điểm và rời rạc hóa trung bình để biểu diễn trường ngẫu nhiên kết hợp với nhiễu bậc hai để phân tích. Trong luận án này, người viết sử dụng kết quả trong tài liệu [63] tương ứng với trường hợp tốc độ quay bằng không tức là dầm đứng yên để đối chiếu kết quả xác định độ lớn của COV của trị riêng thứ nhất được xác định bằng SFEM.

Xét dầm công-xôn có chiều dài nhịp $L = 0{,}8\ m$, kích thước mặt cắt ngang $h = 0{,}04\ m$, $b = 0{,}015\ m$. E và ρ là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, có giá trị kỳ vọng $E_0 = 165{,}44\times10^9\ N/m^2$, $\rho_0 = 7830\ kg/m^3$. Trường ngẫu nhiên E và ρ có tương quan với nhau thông qua hệ số tương quan γ, độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên $\sigma_f = \sigma_g = 0{,}1$.

Trong tài liệu [63] trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu là trường ngẫu nhiên một chiều với chiều dài tương quan $d_x = L$ và hai trường hợp tương quan được xem xét: $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Kết quả này được dùng để kiểm chứng cho bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính cho kết cấu dầm với tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian (2D, 3D) được phân tích bằng SFEM đề xuất trong luận án này. Trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều các thông số về chiều dài tương quan và hệ số tương quan được chọn: $d_x = L$, $d_y = 100L$, $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều các thông số được chọn: $d_x = L$, $d_y = d_z = 100L$, $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Kết quả so sánh COV của giá trị riêng thứ nhất được xác định bằng SFEM đề xuất trong luận án và kết quả trong công trình đã được xuất bản [63] được thể hiện trong Bảng 2.7 với sai số được ghi nhận dưới 5%. Điều này khẳng định tính chính xác cũng như sự phù hợp của phương pháp được đề xuất. COV của giá trị riêng thứ nhất khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều có độ lớn bằng nhau, hiện tượng này được giải thích bởi chiều dài tương quan theo trục x được lấy bằng nhau còn chiều dài tương quan theo các trục còn lại có giá trị rất lớn. Chính điều này làm cho tính ngẫu nhiên theo các trục y và z của tính chất vật liệu gần như đồng nhất, đáp ứng của trường ngẫu nhiên không gian giống trường ngẫu nhiên một chiều, hoàn toàn phù hợp với bản chất vật lý của bài toán.

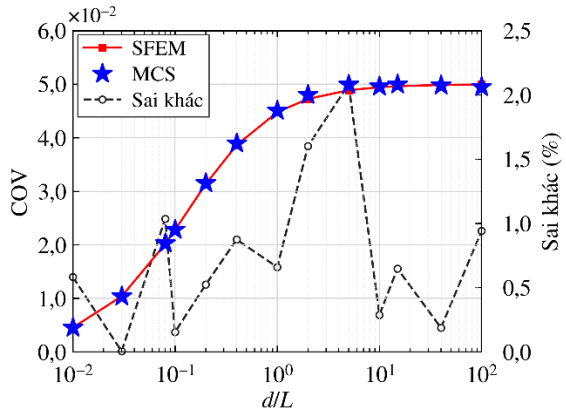
Bảng 2.7. So sánh COV của giá trị riêng thứ nhất bằng SFEM với công bố [63]

Mô đun đàn hồi	$\gamma = 0$	$\gamma = 1{,}0$
NN một chiều ($d_x = L$) [63]	0,1300	0,0745
NN hai chiều ($d_x = L$, $d_y = 100L$) [Luận án]	0,1305	0,0772
NN ba chiều ($d_x = L$, $d_y = d_z = 100L$) [Luận án]	0,1305	0,0772
Sai số (%)	**0,3846**	**3,6242**

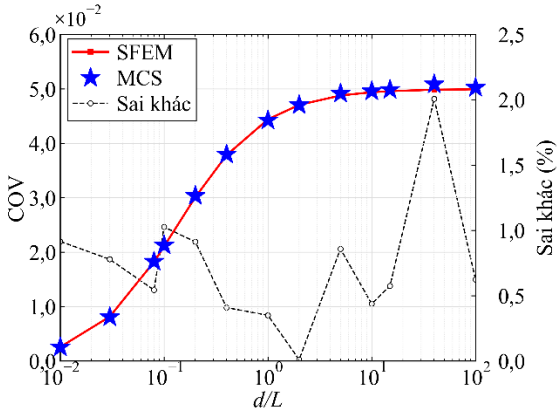
2.6.5. So sánh kết quả phân tích đáp ứng của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo

Mô phỏng Monte Carlo (MCS) được sử dụng làm phương pháp kiểm chứng độc lập cho SFEM. Các mẫu trường ngẫu nhiên đầu vào được sinh bằng phương pháp biểu diễn phổ và phân tích bằng FEM tiêu chuẩn để xác định chuyển vị và giá trị riêng của dầm. Kỳ vọng, phương sai và COV của đáp ứng được ước lượng từ tập hợp kết quả, kiểm tra hội tụ theo số mẫu và dùng làm cơ sở đánh giá độ chính xác, độ tin cậy của phương pháp SFEM đề xuất.

Trong nghiên cứu này, sử dụng phương pháp phổ tạo ra $N = 10.000$ mẫu của E và ρ ngẫu nhiên không gian kết hợp với FEM tiêu chuẩn thu được đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Các giá trị độ lệch chuẩn của hai trường ngẫu nhiên: $\sigma_f = \sigma_g = 0{,}05$. Xử lý thống kê trên tập hợp dữ liệu thu được từ đáp ứng ngẫu nhiên của dầm có thể thiết lập được COV của chuyển vị và giá trị riêng. Độ bất định thống kê của kết quả MCS được đánh giá thông qua khoảng tin cậy 95% của kỳ vọng và COV. Độ rộng tương đối lớn nhất từ giá trị ước lượng đến hai cận của khoảng tin cậy được yêu cầu không vượt quá 0,5% đối với kỳ vọng và 2% đối với COV. Đồng thời, các đại lượng thống kê này cũng được xác định bằng SFEM được phát triển trong luận án. Kết quả so sánh giữa hai phương pháp độc lập được trình bày trong Hình 2.19 đối với bài toán ứng xử tĩnh ngẫu nhiên. Tương tự, Hình 2.20 đến Hình 2.22 thể hiện so sánh COV của trị riêng trong trường hợp tính chất đặc trưng của vật liệu ngẫu nhiên hai chiều, trong khi Hình 2.23 đến Hình 2.25 trình bày kết quả tương ứng trong trường hợp tính chất ngẫu nhiên ba chiều. Các phân tích được thực hiện với chiều dài tương quan theo các trục không gian bằng nhau và thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$, nhằm khảo sát ảnh hưởng của đặc trưng tương quan không gian đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Kết quả phân tích chỉ ra COV được xác định bằng SFEM và MCS sai khác được ghi nhận nhỏ hơn 5% vì vậy phương pháp SFEM được phát triển trong luận án đạt được độ chính xác và phù hợp khi phân tích ứng xử tĩnh và bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của kết cấu dầm trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên.

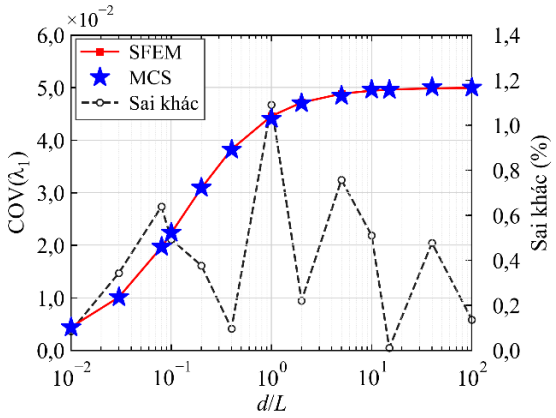


a, Ngẫu nhiên hai chiều

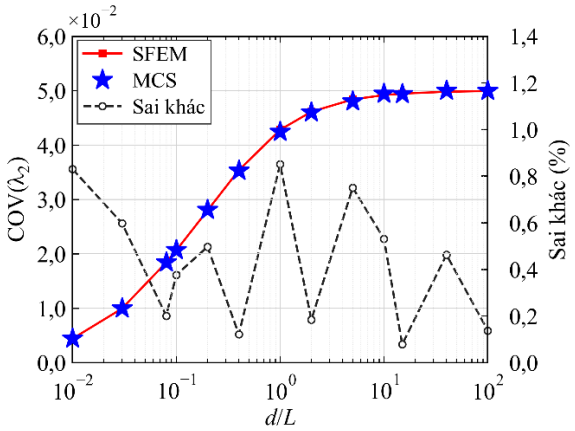


b, Ngẫu nhiên ba chiều

Hình 2.19. So sánh COV của chuyển vị xác định bằng SFEM và MCS

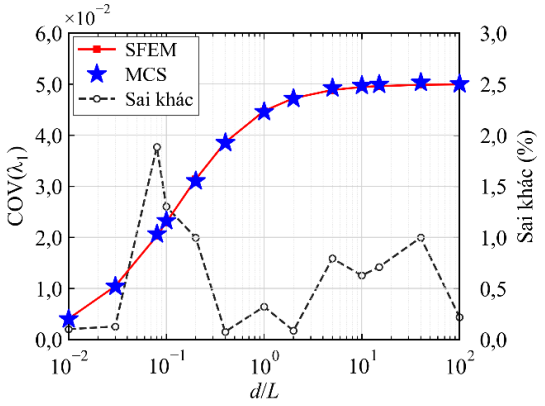


a. λ_1

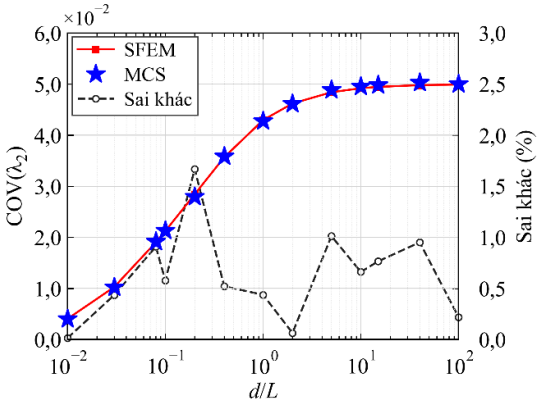


b. λ_2

Hình 2.20. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều xác định bằng SFEM và MCS

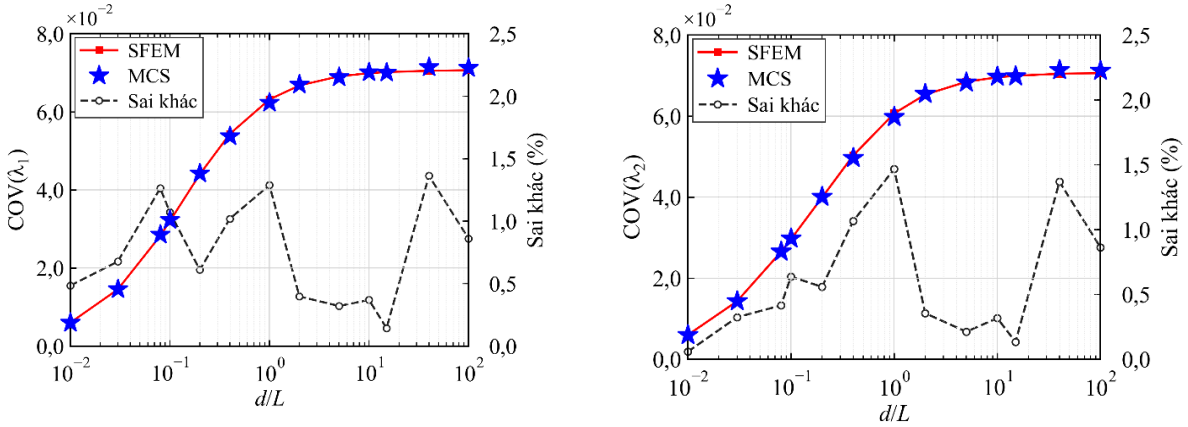


a. λ_1



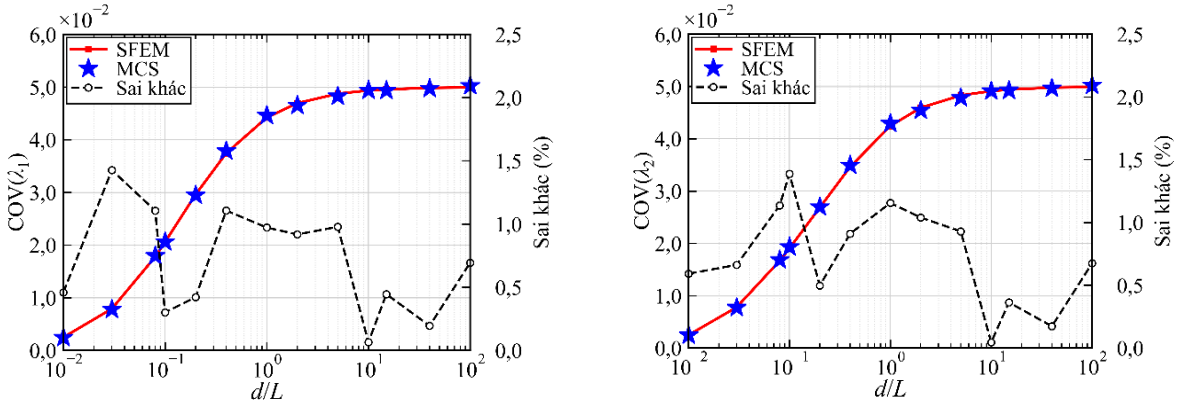
b. λ_2

Hình 2.21. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS



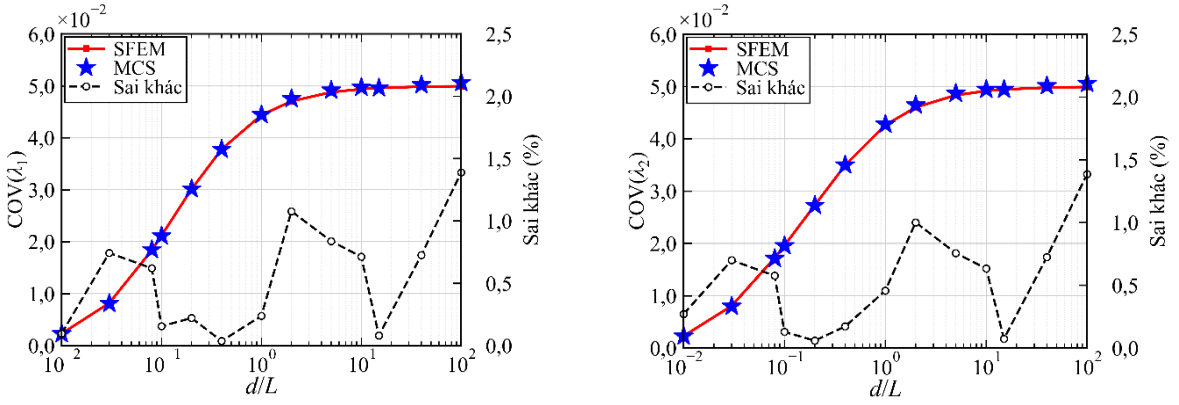
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.22. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$)



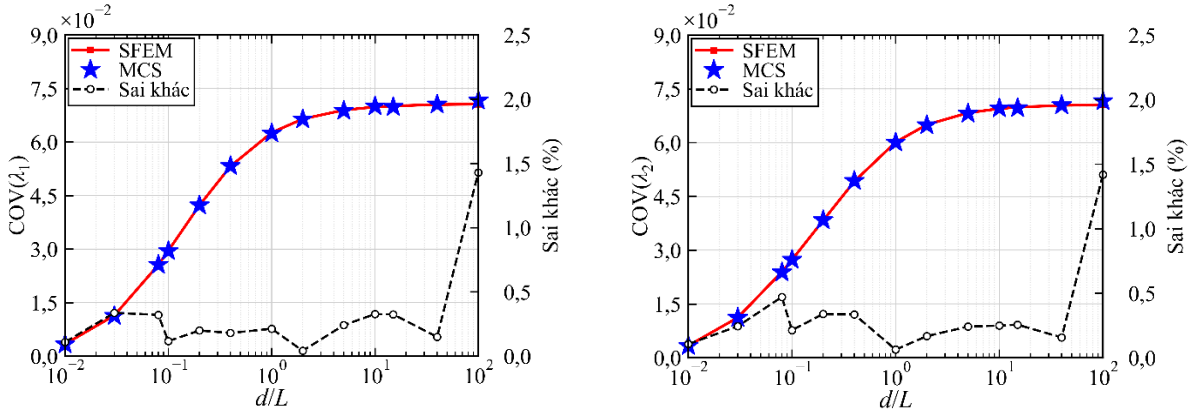
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.23. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS



a. λ_1 *b.* λ_2

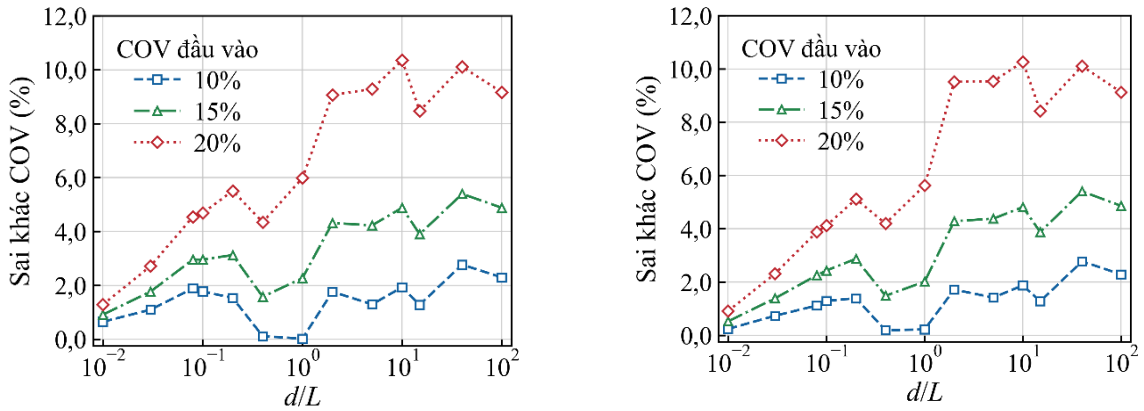
Hình 2.24. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS



a. λ_1 *b.* λ_2

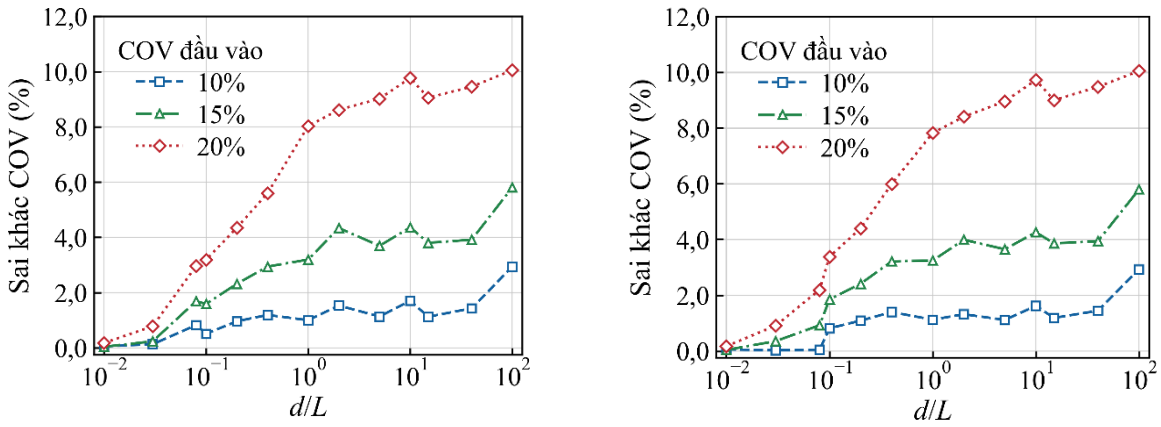
Hình 2.25. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$)

Phạm vi khảo sát được mở rộng đến các mức COV vật liệu bằng 0,10; 0,15 và 0,20 nhằm so sánh COV của hai giá trị riêng đầu tiên giữa SFEM và MCS. Khảo sát xét đồng thời mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng là các trường ngẫu nhiên hai chiều hoặc ba chiều, với hệ số tương quan chéo bằng không, trên dải chiều dài tương quan đã xét như Hình 2.26 và Hình 2.27. MCS sử dụng phương pháp biểu diễn phổ SRM, với số mẫu được xác định theo các tiêu chí hội tụ thống kê đã thiết lập. Kết quả cho thấy sai khác tương đối COV giữa hai phương pháp nhìn chung tăng theo mức độ biến động vật liệu và chiều dài tương quan. Sai khác lớn nhất tại các mức COV đầu vào 0,10; 0,15 và 0,20 lần lượt xấp xỉ 2,94%; 5,81% và 10,35%. Tại COV đầu vào bằng 0,20, phần lớn kết quả có sai khác dưới 10%, nhưng một số trường hợp vượt nhẹ mức này. Các kết quả cung cấp cơ sở định lượng để đánh giá mức độ phù hợp của SFEM sử dụng nhiễu bậc nhất trong phạm vi khảo sát.



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.26. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS (γ =0, $\mathrm{COV}_E = \mathrm{COV}_\rho$)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 2.27. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS (γ =0, COV_E = COV_ρ)

2.7. KẾT LUẬN CHƯƠNG II

Phương pháp SFEM đã được thiết lập trong Chương II phân tích ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian. Các kết quả nghiên cứu cốt lõi bao gồm:

Về xây dựng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên:

- ✓ **Kỹ thuật tích phân trọng số:** Đã được phát triển để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên không gian thành tập hợp các biến ngẫu nhiên cơ bản. Cách tiếp cận này cho phép thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng ngẫu nhiên của phần tử dưới dạng tổng của thành phần tất định (theo giá trị kỳ vọng) và thành phần ngẫu nhiên (phụ thuộc vào biến động ngẫu nhiên của tính chất vật liệu).
- ✓ **Phương pháp nhiễu loạn:** Đã được phát triển để lan truyền yếu tố ngẫu nhiên từ tính chất vật liệu vào đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cho phép xác định trực tiếp chuỗi xấp xỉ bậc nhất của các đại lượng đầu ra ngẫu nhiên (chuyển vị, giá trị riêng) mà không cần thực hiện mô phỏng lặp lại nhiều lần.

Về khả năng giải quyết bài toán: Dựa trên mô hình SFEM được đề xuất, hai bài toán cơ bản của kết cấu dầm có vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian đã được giải quyết trọn vẹn, bao gồm:

- ✓ **Bài toán phân tích tĩnh ngẫu nhiên:** Xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê (kỳ vọng, phương sai, COV) của chuyển vị.
- ✓ **Bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên:** Xác định các

đặc trưng thống kê của giá trị riêng.

- ✓ **Về kiểm chứng độ tin cậy và tính chính xác:** Mô hình SFEM được nghiên cứu phát triển đã được kiểm định nghiêm ngặt qua các tiêu chí cốt lõi, khẳng định tính đúng đắn và khả năng ứng dụng của phương pháp.
- ✓ **Sự hội tụ của lời giải số:** Kết quả phân tích cho thấy hệ số biến thiên (COV) của đáp ứng ngẫu nhiên hội tụ ổn định và không phụ thuộc vào mật độ lưới chia khi số lượng phần tử đủ lớn.
- ✓ **Tính nhất quán với lý thuyết tính toán ngẫu nhiên:** Khi độ biến động của tính chất vật liệu đầu vào tiến về không, đáp ứng ngẫu nhiên của dầm tiệm cận về kết quả của bài toán tất định, hoàn toàn phù hợp với logic vật lý của bài toán.
- ✓ **Độ tin cậy:** Kết quả phân tích đạt sự tương đồng cao khi đối sánh với các nghiên cứu đã công bố về các bài toán tương đương cho thấy mức độ sai lệch của mô hình đề xuất là tương đối nhỏ.
- ✓ **Độ chính xác:** Kết quả phân tích bằng SFEM được kiểm chứng chéo với phương pháp mô phỏng MCS đảm bảo độ chính xác trong dự báo ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu dầm.

CHƯƠNG III: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

3.1. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỘT CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Xem xét kết cấu cột chịu nén đúng tâm có mặt cắt ngang hình chữ nhật với bề rộng là *b* và chiều cao mặt cắt là *h*. Trong nghiên cứu này xét trường hợp mất ổn định uốn trong mặt phẳng của cột. Trong trường hợp mô đun đàn hồi của dầm là tất định $E = E_0$, phương trình vi phân cân bằng ổn định của cột như sau:

$$E_0 I \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{3.1}$$

Cột được chia thành N_e phần tử với chiều dài mỗi phần tử là L_e. Để phân tích ổn định của cột, phần tử cột-dầm được xem xét với hai nút ở hai đầu. Phần tử chịu tác dụng đồng thời của tải trọng gây ra uốn $\{P\}_e$ và lực dọc trục *P*. Chuyển vị của phần tử được xấp xỉ thông qua ma trận hàm dạng và chuyển vị nút phần tử như (3.2):

$$w_e = [N]\{q_i\}_e \tag{3.2}$$

Trong đó $\{q_i\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút của phần tử, [*N*] là ma trận hàm dạng.

$$\{q_i\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \tag{3.3}$$

Công của ngoại lực của phần tử được xác định như phương trình (3.4):

$$\mathrm{W}_e = \frac{1}{2}\{q_i\}_e^T \{P\}_e + \frac{P}{2}\int_0^{L_e}\left(\frac{dw_e}{dx}\right)^2 dx \tag{3.4}$$

Thành phần năng lượng đàn hồi uốn được thiết lập như phương trình (3.5):

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e}[\varepsilon]^T \{\sigma\} dV_e \tag{3.5}$$

Cân bằng giữa công của ngoại lực và năng lượng biến dạng uốn của phần tử thu được:

$$\frac{1}{2}\{q_i\}_e^T \{P\}_e + \frac{P}{2}\int_0^{L_e}\left(\frac{dw_e}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{V_e}[\varepsilon]^T \{\sigma\} dV_e \tag{3.6}$$

Quan hệ giữa chuyển vị nút của phần tử và lực nút của phần tử thông qua ma trận độ cứng của phần tử như phương trình (3.7).

$$[k]_e \{q_i\}_e = \{P\}_e \tag{3.7}$$

Thay phương trình (3.7) vào phương trình (3.6) thu được phương trình sau:

$$\frac{1}{2}\{q_i\}_e^T[k]_e\{q_i\}_e = \frac{1}{2}\int_{V_e}[\varepsilon]^T\{\sigma\}dV_e - \frac{P}{2}\int_0^{L_e}\left(\frac{dw_e}{dx}\right)^2 dx \tag{3.8}$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng thông qua định luật Hooke như (3.9).

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{3.9}$$

Thay (3.1) và (3.9) vào phương trình (3.8) nhận được phương trình (3.10).

$$\{q_i\}_e^T[k]_e\{q_i\}_e = \{q_i\}_e^T\left[\int_{V_e} y_e^2[N'']^T[D][N'']dV_e - P\int_0^{L_e}[N']^T[N']dx\right]\{q_i\}_e \tag{3.10}$$

Từ phương trình (3.10), ma trận độ cứng của phần tử được xác định:

$$[k]_e = [K]_e - P[K_P]_e \tag{3.11}$$

Các ma trận xuất hiện trong phương trình (3.11) được xác định như các phương trình sau:

$$[K]_e = \int_{V_e} y_e^2[N'']^T[D][N'']dV_e \tag{3.12}$$

$$[K_P]_e = \int_0^{L_e}[N']^T[N']dx = \begin{bmatrix} \frac{6}{5L_e} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L_e} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2L_e}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L_e}{30} \\ & & \frac{6}{5L_e} & -\frac{1}{10} \\ \text{sym.} & & & \frac{2L_e}{15} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Đối với trường E của phần tử là tất định thì ma trận độ cứng của phần tử chỉ chịu uốn $[K]_e$ được xác định như (3.14) với I là mô men quán tính đối với trục uốn của mặt cắt ngang:

$$[K]_e = \frac{E_0 I}{L_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$[K_P]_e$ là ma trận độ cứng hình học của phần tử xem xét ảnh hưởng của lực dọc đến phần tử chịu uốn. Ma trận $[k]$ được xây dựng từ ma trận $[K]_e$ như (3.15) với ký hiệu $[\bullet]_e^{Ext}$ (tương ứng là $[K]_e^{Ext}$, $[K_P]_e^{Ext}$). Các ma trận này có cùng kích thước với ma trận độ cứng tổng thể. Ký hiệu *Ext* thể hiện các ma trận này được xây dựng từ $[K]_e$, $[K_P]_e$ bằng cách đặt các phần tử của ma trận cục bộ vào đúng vị trí hàng và cột tương ứng với chỉ số bậc tự do toàn cục của các nút phần tử, trong khi các số hạng còn lại được lấy bằng không.

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e}[k_e] = \sum_{e=1}^{N_e}[K]_e^{Ext} - P\sum_{e=1}^{N_e}[K_P]_e^{Ext} \tag{3.15}$$

Phương trình phân tích ổn định của cột như phương trình (3.16).

$$\left(\left[K\right]-\lambda\left[K_P\right]\right)\{\psi\}=0 \tag{3.16}$$

Trong đó: $\left[K\right]=\sum_{e=1}^{N_e}\left[K\right]_e^{Ext}$, $\left[K_P\right]=\sum_{e=1}^{N_e}\left[K_P\right]_e^{Ext}$, $\lambda=P$ là giá trị riêng của lực tới hạn, $\{\psi\}$ là véc tơ chuyển vị nút của toàn bộ cột (dạng mất ổn định). Giá trị riêng của lực tới hạn được xác định dựa vào phương trình (3.16). Để phương trình (3.16) có nghiệm không tầm thường thì điều kiện sau phải thỏa mãn:

$$Det\left(\left[K\right]-\lambda\left[K_P\right]\right)=0 \tag{3.17}$$

Giải phương trình (3.17) có thể thu được các giá trị riêng của lực tới hạn tương ứng với các dạng mất ổn định tổng thể khác nhau. Trên thực tế giá trị nhỏ nhất của giá trị riêng tương ứng với tải trọng tới hạn nhỏ nhất được quan tâm trong thực tế tính toán.

3.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH EULER

Xem xét kết cấu cột mặt cắt ngang hình chữ nhật có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều và ba chiều) như các phương trình (3.20) và (3.21). Trong đó E_0 là giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi. $f(x,y)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, hai chiều (2D) và có giá trị kỳ vọng bằng không. Tương tự, $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, ba chiều và có giá trị kỳ vọng bằng không. Luận án giới hạn phân tích tải trọng tới hạn của dạng mất ổn định uốn phẳng theo lý thuyết Euler. Mặt phẳng uốn được lựa chọn tương ứng với trục quán tính chính có bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện trong cấu hình tham chiếu. Đối với tiết diện vuông được khảo sát, hai bán kính quán tính chính bằng nhau; luận án lựa chọn mặt phẳng (x-y) để xây dựng và phân tích mô hình. Tải trọng tới hạn được xác định là giá trị riêng dương nhỏ nhất của bài toán ổn định trong mặt phẳng đã chọn.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathcal{D}\left(x,\theta\right)\frac{d^2w\left(x,\theta\right)}{dx^2}\right]+P\frac{d^2w\left(x,\theta\right)}{dx^2}=0 \tag{3.18}$$

Với độ cứng uốn hiệu dụng được xác định như (3.19).

$$\mathcal{D}\left(x,\theta\right)=\int_A y_e^2E\left(\mathbf{x},\theta\right)dydz \tag{3.19}$$

Phương trình (3.18) là phương trình vi phân có hệ số ngẫu nhiên. Việc tìm nghiệm chính xác của phương trình này gặp nhiều khó khăn về mặt toán học, đồng thời chỉ cung cấp kết quả cho từng hiện thực mẫu riêng lẻ thay vì quy luật phân bố tổng thể. Do đó, luận án phát triển phương pháp SFEM dựa trên kỹ thuật tích phân trọng số kết hợp với phương

pháp nhiễu, cho phép xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn (kỳ vọng, phương sai).

$$E(x,y) = E_0\left[1 + f(x,y)\right] \tag{3.20}$$

$$E(x,y,z) = E_0\left[1 + f(x,y,z)\right] \tag{3.21}$$

Kết cấu cột được phân chia thành N_e phần tử có mô đun thay đổi ngẫu nhiên không gian như các phương trình (3.22) và (3.23).

$$E_e(x_e,y_e) = E_0\left[1 + f_e(x_e,y_e)\right] \tag{3.22}$$

$$E_e(x_e,y_e,z_e) = E_0\left[1 + f_e(x_e,y_e,z_e)\right] \tag{3.23}$$

Thay phương trình (3.22) vào phương trình (3.12) với $[D] = E_e$ nhận được ma trận độ cứng do uốn của phần tử trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.24).

$$[K]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e + \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e,y_e)[N''] dV_e \tag{3.24}$$

Tương tự với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều, thay phương trình (3.23) vào phương trình (3.12) với $[D] = E_e$ nhận được ma trận độ cứng của phần tử do uốn như phương trình sau:

$$[K]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e + \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e,y_e,z_e)[N''] dV_e \tag{3.25}$$

Thay phương trình (3.24) vào phương trình (3.11) nhận được ma trận độ cứng của phần tử cột dầm như phương trình (3.26).

$$[k]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e,y_e)[N''] dV_e}_{\sum_{i=1}^{N_W} [\Delta K_i]_e \Theta_{i,e}} - P[K_P]_e \tag{3.26}$$

Trong phương trình (3.26), $N_w = 3$ là số lượng biến ngẫu nhiên của một phần tử được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên hai chiều. Các ma trận xuất hiện trong phương trình (3.26) được xác định theo (2.47) đối với phần tất định và phần ngẫu nhiên theo các công thức (2.50) - (2.52). Các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (3.26) được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên như phương trình (3.27).

$$\Theta_{i,e} = \int_{A_e} y_e^2 x_e^{i-1} f_e(x_e,y_e) dA_e \tag{3.27}$$

Trong trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều, ma trận độ cứng của phần tử cột-dầm được xác định như (3.28) với các biến ngẫu nhiên cơ bản như (3.29) và các ma trận xuất hiện trong phương trình được xác định theo phương trình (2.47), và (2.76) - (2.78)

$$[k]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e, y_e, z_e)[N''] dV_e}_{\sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i]_e \Theta_{i,e}} - P[K_P]_e \quad (3.28)$$

$$\Theta_{i,e} = \int_{V_e} y_e^2 x_e^{i-1} f_e(x_e, y_e, z_e) dV_e \quad (3.29)$$

Ma trận [*k*] của toàn kết cấu cột được xây dựng từ [k_e] như (3.30). Khi mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian thì ma trận độ cứng của phần tử được phân chia thành phần tất định và thành phần ngẫu nhiên. Thành phần ngẫu nhiên là hàm của ba biến ngẫu nhiên (N_w *= 3)* được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi như (3.27) và (3.29). Vì vậy ma trận độ cứng tổng thể chỉ xét đến ảnh hưởng của uốn là hàm của $N_w \times N_e$ biến ngẫu nhiên như phương trình sau:

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e} [k_e] = \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_{i,e}}_{[K(\{\Theta\})]} - P \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext}}_{[K_P]} \quad (3.30)$$

Ma trận độ cứng của phần tử chỉ chịu uốn là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_{1,e}, \Theta_{2,e}, \Theta_{3,e}\}_{e=1:N_e}$, các biến ngẫu nhiên này có giá trị trung bình là $\bar{\Theta}_i^e$. Vì vậy giá trị riêng của lực tới hạn và dạng mất ổn định cũng là hàm các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}$. Vì vậy phương trình phân tích ổn định có thể được viết lại như phương trình sau:

$$\left([K(\{\Theta\})] - \lambda(\{\Theta\})[K_P] \right) \{\psi(\{\Theta\})\} = \{0\} \quad (3.31)$$

Đối với dạng mất ổn định thứ *k* thì phương trình mất ổn định được viết như (3.32):

$$\left([K(\{\Theta\})] - \lambda^k(\{\Theta\})[K_P] \right) \{\psi^k(\{\Theta\})\} = \{0\} \quad (3.32)$$

Triển khai chuỗi Taylor các đại lượng xuất hiện trong phương trình (3.32) xung quanh giá trị kỳ vọng của các đại lượng thu được các phương trình (3.33) - (3.35). Ký hiệu $[\bullet]_{\bar{\Theta}_{i,e}}$ là các đạo hàm riêng theo các biến ngẫu nhiên được xác định tương ứng với giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên.

$$\begin{aligned} [K(\{\Theta\})] \approx & \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i,e} - \bar{\Theta}_i^e) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i_1,e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1})(\Theta_{i_2,e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \ldots \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)\approx\lambda_0^k+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\left[\frac{\partial\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left(\Theta_{i,e}-\overline{\Theta}_i^e\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left[\frac{\partial^2\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)}{\partial\Theta_{i_1,e_1}\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left(\Theta_{i_1,e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2,e_2}-\overline{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right)+\ldots \quad (3.34)$$

$$\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}=\left\{\psi_0^k\right\}+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\left[\frac{\partial\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left(\Theta_{i,e}-\overline{\Theta}_i^e\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left[\frac{\partial^2\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}}{\partial\Theta_{i_1,e_1}\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left(\Theta_{i_1,e_1}-\overline{\Theta}_{i_1}^{e_1}\right)\left(\Theta_{i_2,e_2}-\overline{\Theta}_{i_2}^{e_2}\right)+\ldots \quad (3.35)$$

Đạo hàm riêng bậc nhất theo các biến ngẫu nhiên và đạo hàm riêng bậc hai của các đại lượng xuất hiện trong các phương trình (3.33) - (3.35) được xác định tại $\{\Theta\}=0$. Các biến ngẫu nhiên được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng bằng không. Do đó giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên cũng bằng không. Thay $\overline{\Theta}_{i,e}=0$ vào các phương trình (3.33) - (3.35) nhận được các phương trình (3.36) - (3.38).

$$[K]\approx\sum_{e=1}^{N_e}[K_0]_e^{Ext}+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\Theta_{i,e}+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left[\frac{\partial^2\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_1,e_1}\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\Theta_{i_1,e_1}\Theta_{i_2,e_2}+\ldots \quad (3.36)$$

$$\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)\approx\lambda_0^k+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\left[\frac{\partial\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\Theta_{i,e}+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left[\frac{\partial^2\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)}{\partial\Theta_{i_1,e_1}\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\Theta_{i_1,e_1}\Theta_{i_2,e_2}+\ldots \quad (3.37)$$

$$\left\{\psi^k\right\}=\left\{\psi_0^k\right\}+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\left[\frac{\partial\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\Theta_{i,e}+\frac{1}{2}\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left[\frac{\partial^2\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}}{\partial\Theta_{i_1,e_1}\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\Theta_{i_1,e_1}\Theta_{i_2,e_2}+\ldots \quad (3.38)$$

Thay các phương trình từ (3.36) - (3.38) vào phương trình (3.32), đồng nhất các hệ số cùng bậc của các biến ngẫu nhiên nhận được các kết quả sau:

- ✓ Các hệ số tự do:

$$\left[\sum_{e=1}^{N_e}[K_0]_e^{Ext}-\lambda_0^k[K_P]\right]\left\{\psi_o^k\right\}=0 \quad (3.39)$$

- ✓ Các hệ số bậc nhất:

$$\left[\sum_{e=1}^{N_e}\left[K_0\right]_e^{Ext}-\lambda_0^k\left[K_P\right]\right]\left[\frac{\partial\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}= \left[\left[\frac{\partial\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left[K_P\right]-\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\right]\left\{\psi_0^k\right\} \tag{3.40}$$

Nhân cả hai vế của phương trình (3.32) với $\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}^T$ nhận được phương trình (3.41).

$$\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}^T\left(\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]-\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)\left[K_P\right]\right)\left\{\psi^k\left(\{\Theta\}\right)\right\}=0 \tag{3.41}$$

Lấy đạo hàm riêng theo các biến ngẫu nhiên $\Theta_{i,e}$ hai vế của phương trình (3.41) và để ý đến các điều kiện trong các phương trình (3.39) và (3.40), đạo hàm riêng bậc nhất của giá trị riêng thứ *k* của lực tới hạn theo các biến $\Theta_{i,e}$ được xác định như (3.42).

$$\left[\frac{\partial\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}=\frac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}} \tag{3.42}$$

Thay phương trình (3.42) vào phương trình (3.37) nhận được xấp xỉ bậc nhất của giá trị riêng của lực tới hạn theo các biến ngẫu nhiên như phương trình (3.43).

$$\lambda^k\left(\{\Theta\}\right)\approx\lambda_0^k+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\frac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\Theta_{i,e} \tag{3.43}$$

Dựa vào phương trình (3.43), thực hiện các phép toán lấy kỳ vọng và phương sai của giá trị riêng thứ *k* của lực tới hạn nhận được các phương trình sau:

$$\mathbb{E}\left(\lambda^k\right)=\mathbb{E}\left[\lambda_0^k+\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=1}^{N_w}\frac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\Theta_{i,e}\right]\simeq\lambda_0^k \tag{3.44}$$

$$Var\left(\lambda^k\right)=\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left\{\frac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_1,e_1}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\times\right.$$
$$\left.\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1,e_1}\Theta_{i_2,e_2}\right]\right\} \tag{3.45}$$

Để ý đến phương trình (3.27) tương ứng với trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều. Giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên trong phương trình (3.45) được xác định như phương trình (3.46).

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1,e_1}\Theta_{i_2,e_2}\right]=\int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1}\mathbb{E}\left[f_{e_1}\left(x_{e_1},y_{e_1}\right)f_{e_2}\left(x_{e_2},y_{e_2}\right)\right]dA_{e_1}dA_{e_2} \tag{3.46}$$

Tương tự, trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều thì giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (3.45) được xác định như phương trình (3.47) khi để ý đến phương trình (3.29).

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1,e_1}\Theta_{i_2,e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1}\mathbb{E}\left[f_{e_1}\left(x_{e_1},y_{e_1},z_{e_1}\right)f_{e_2}\left(x_{e_2},y_{e_2},z_{e_2}\right)\right]dV_{e_1}dV_{e_2} \tag{3.47}$$

Giá trị kỳ vọng của trường ngẫu nhiên hai chiều xuất hiện trong phương trình (3.46) và giá trị kỳ vọng của trường ngẫu nhiên ba chiều xuất hiện trong phương trình (3.47) được tính toán thông qua hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên như các phương trình sau:

$$\mathbb{E}\left[f_{e_1}\left(x_{e_1},y_{e_1}\right)f_{e_2}\left(x_{e_2},y_{e_2}\right)\right]=R_{f_{e_1}f_{e_2}} \tag{3.48}$$

$$\mathbb{E}\left[f_{e_1}\left(x_{e_1},y_{e_1},z_{e_1}\right)f_{e_2}\left(x_{e_2},y_{e_2},z_{e_2}\right)\right]=R_{f_{e_1}f_{e_2}} \tag{3.49}$$

Thay phương trình (3.48) vào phương trình (3.46), sau đó thay (3.46) vào phương trình (3.45) nhận được xấp xỉ bậc nhất của phương sai giá trị riêng của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.50).

$$Var\left(\lambda^k\right)=\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\dfrac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_1,e_1}}\right]_{\bar{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\dfrac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\bar{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\times \\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1}f_{e_2}}\,dA_{e_1}dA_{e_2}\end{array}\right\} \tag{3.50}$$

Tương tự phương sai của giá trị riêng của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (3.51) khi thay các phương trình (3.49), (3.47) vào phương trình (3.45).

$$Var\left(\lambda^k\right) =$$

$$\sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\dfrac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_1,e_1}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\dfrac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i_2,e_2}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1}f_{e_2}}\, dV_{e_1} dV_{e_2}\end{array}\right\} \tag{3.51}$$

Ma trận độ cứng tổng thể xét đến ảnh hưởng của uốn được thiết lập từ ma trận độ cứng của từng phần tử. Ma trận độ cứng đàn hồi của phần tử là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Do đó ma trận độ cứng đàn hồi tổng thể cũng là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Đạo hàm bậc nhất của ma trận độ cứng đàn hồi tổng thể của toàn bộ kết cấu được xác định tương ứng với giá trị kỳ vọng bằng không, được xác định như phương trình (3.52). Ký hiệu $\left[\Delta K_i\right]_e^{Ext}$ là ma trận được mở rộng từ ma trận $\left[\Delta K_i\right]_e$

$$\left[\frac{\partial\left[K\left(\{\Theta\}\right)\right]}{\partial\Theta_{i,e}}\right]_{\overline{\Theta}_{i,e}} = \left[\Delta K_i\right]_e^{Ext} \tag{3.52}$$

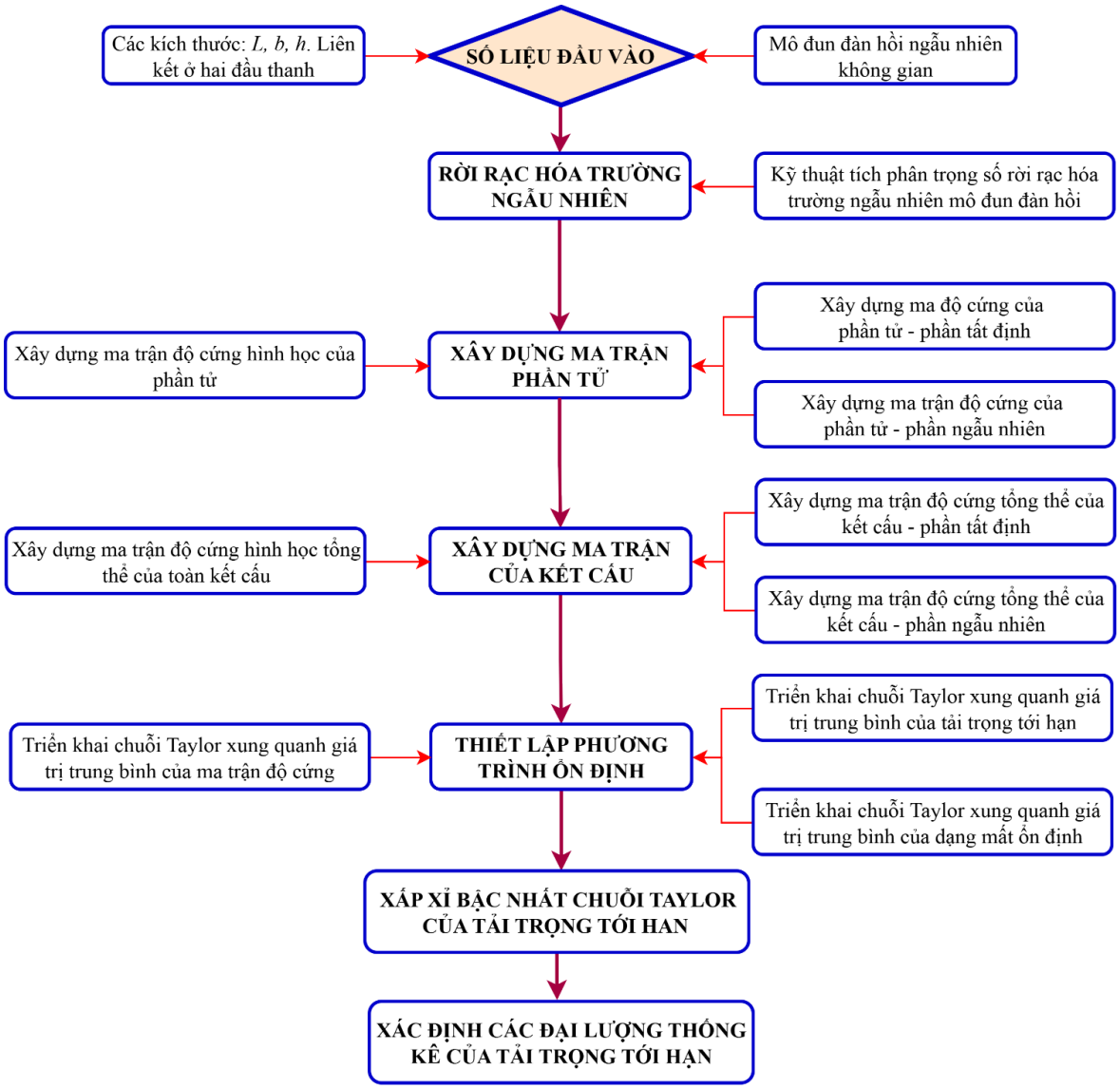
Thay phương trình (3.52) vào các phương trình (3.50) và (3.51) thu được phương sai của giá trị riêng của lực tới hạn như phương trình tương ứng với trường hợp *E* ngẫu nhiên hai chiều và như phương trình (3.54) tương ứng với trường hợp *E* ngẫu nhiên ba chiều.

$$Var\left(\lambda^k\right) = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\times \\ \int_{A_{e_1}}\int_{A_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1}f_{e_2}}\, dA_{e_1} dA_{e_2}\end{array}\right\} \tag{3.53}$$

$$Var\left(\lambda^k\right) = \sum_{e_1=1}^{N_e}\sum_{e_2=1}^{N_e}\sum_{i_1=1}^{N_w}\sum_{i_2=1}^{N_w}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\Delta K_{i_1}\right]_{e_1}^{Ext}\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[\Delta K_{i_2}\right]_{e_2}^{Ext}\left\{\psi_o^k\right\}}{\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}\left\{\psi_o^k\right\}^T\left[K_P\right]\left\{\psi_o^k\right\}}\times \\ \int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1}f_{e_2}}\, dV_{e_1} dV_{e_2}\end{array}\right\} \tag{3.54}$$

Phương trình (3.55) xác định COV của lực tới hạn. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định ngẫu nhiên bằng SFEM như Hình 3.1.

$$\text{COV} = \frac{\sqrt{Var\left[\lambda^k\right]}}{\mathbb{E}\left[\lambda^k\right]} \tag{3.55}$$



Hình 3.1. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng SFEM

3.3. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER NGẪU NHIÊN CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG MÔ PHỎNG MONTE CARLO

Để xác thực các phương trình được thiết lập bằng SFEM để phân tích ổn định của cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian và kiểm tra tính chính xác và sự phù hợp của phương pháp được đề xuất, trong phần này tác giả xây dựng một phương pháp độc lập dựa trên MCS kết hợp với FEM tiêu chuẩn để phân tích ổn định ngẫu nhiên của cột. Sử dụng kỹ thuật biểu diễn phổ để biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.56) và ngẫu nhiên ba chiều như các phương trình (3.57).

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}x+\kappa_{2n_2}y+\Phi_{n_1n_2}^{(1)}\right]\\+B_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}x-\kappa_{2n_2}y+\Phi_{n_1n_2}^{(2)}\right]\end{array}\right\} \tag{3.56}$$

$$f\left(x,y,z\right)=\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2n_3}^{(1)}\cos\left[\kappa_{1n_1}x+\kappa_{2n_2}y+\kappa_{3n_3}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(1)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(2)}\cos\left[\kappa_{1n_1}x+\kappa_{2n_2}y-\kappa_{3n_3}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(2)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(3)}\cos\left[\kappa_{1n_1}x-\kappa_{2n_2}y+\kappa_{3n_3}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(3)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(4)}\cos\left[\kappa_{1n_1}x-\kappa_{2n_2}y-\kappa_{3n_3}z+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(4)}\right]\end{array}\right\} \quad (3.57)$$

Thay phương trình (3.56) vào phương trình (3.22) nhận được mô đun đàn hồi của phần tử tương ứng với trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.58). Tương tự thay phương trình (3.57) vào phương trình (3.23) thu được mô đun đàn hồi của phần tử tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều như (3.59). Trong các phương trình (3.58) và (3.59) Δ_e là khoảng cách từ gốc tọa độ tổng thể (được chọn trùng với vị trí đầu dầm) đến nút i của phần tử đang xét.

$$E_e\left(x_e,y_e\right)=E_0\left[1+\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\Phi_{n_1n_2}^{(1)}\right]\\+B_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\Phi_{n_1n_2}^{(2)}\right]\end{array}\right\}\right] \quad (3.58)$$

$$E_e\left(x_e,y_e,z_e\right)=$$
$$E_0\left[1+\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_3=0}^{N_3-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2n_3}^{(1)}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\kappa_{3n_3}z_e+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(1)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(2)}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e-\kappa_{3n_3}z_e+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(2)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(3)}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\kappa_{3n_3}z_e+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(3)}\right]\\+A_{n_1n_2n_3}^{(4)}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e-\kappa_{3n_3}z_e+\Phi_{n_1n_2n_3}^{(4)}\right]\end{array}\right\}\right] \quad (3.59)$$

Thay phương trình (3.58) vào phương trình (3.12) với $[D] = E_e\,(x_e, y_e)$ thu được ma trận độ cứng đàn hồi của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như (3.60):

$$\left[K\right]_e=\underbrace{\int_{V_e}y_e^2E_0\left[N''\right]^T\left[N''\right]dV_e}_{\left[K_0\right]_e}+$$
$$\underbrace{\int_{V_e}y_e^2\left[N''\right]^TE_0\sqrt{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\left\{\begin{array}{l}A_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)+\kappa_{2n_2}y_e+\Phi_{n_1n_2}^{(1)}\right]\\+B_{n_1n_2}\cos\left[\kappa_{1n_1}\left(x_e+\Delta_e\right)-\kappa_{2n_2}y_e+\Phi_{n_1n_2}^{(2)}\right]\end{array}\right\}\left[N''\right]dV_e}_{\left[\Delta K\right]_e} \quad (3.60)$$

Tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều ma trận độ cứng đàn hồi được xác định như (3.61) khi thay phương trình (3.59) vào phương trình (3.12).

$$[K]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 E_0 [N'']^T [N''] dV_e}_{[K_0]_e}$$

$$+ \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{array}{l} A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \left[\begin{array}{l} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e \\ + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \end{array} \right] \\ + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \left[\begin{array}{l} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e \\ - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \end{array} \right] \\ + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \left[\begin{array}{l} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e \\ + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \end{array} \right] \\ + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \left[\begin{array}{l} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e \\ - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \end{array} \right] \end{array} \right\} [N''] dV_e}_{[\Delta K]_e} \quad (3.61)$$

Như vậy, ma trận độ cứng đàn hồi của phần tử trong trường hợp cột có *E* ngẫu nhiên không gian bao gồm hai thành phần: Thành phần thứ nhất được xác định dựa trên giá trị kỳ vọng của *E* tương ứng là thành phần tất định; Thành phần thứ hai là $[\Delta K]_e$ tương ứng là thành phần ngẫu nhiên xét đến tính ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi.

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - P \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \quad (3.62)$$

Thay phương trình (3.62) vào phương trình (3.16) nhận được phương trình phân tích ổn định của cột như phương trình

$$\left[\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - P \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \right] \{\psi\} = \{0\} \quad (3.63)$$

Sử dụng các phương trình (3.56) và (3.57) tạo *N* hàm ngẫu nhiên của trường ngẫu nhiên không gian. Dựa trên tập dữ liệu về tính ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi được tạo ra kết hợp với FEM tiêu chuẩn có thể xác định được giá trị riêng thứ *k* của lực tới hạn ở lần mô phỏng thứ *i* như phương trình sau:

$$Det \left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - \lambda_i^k \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \right) = 0 \quad (3.64)$$

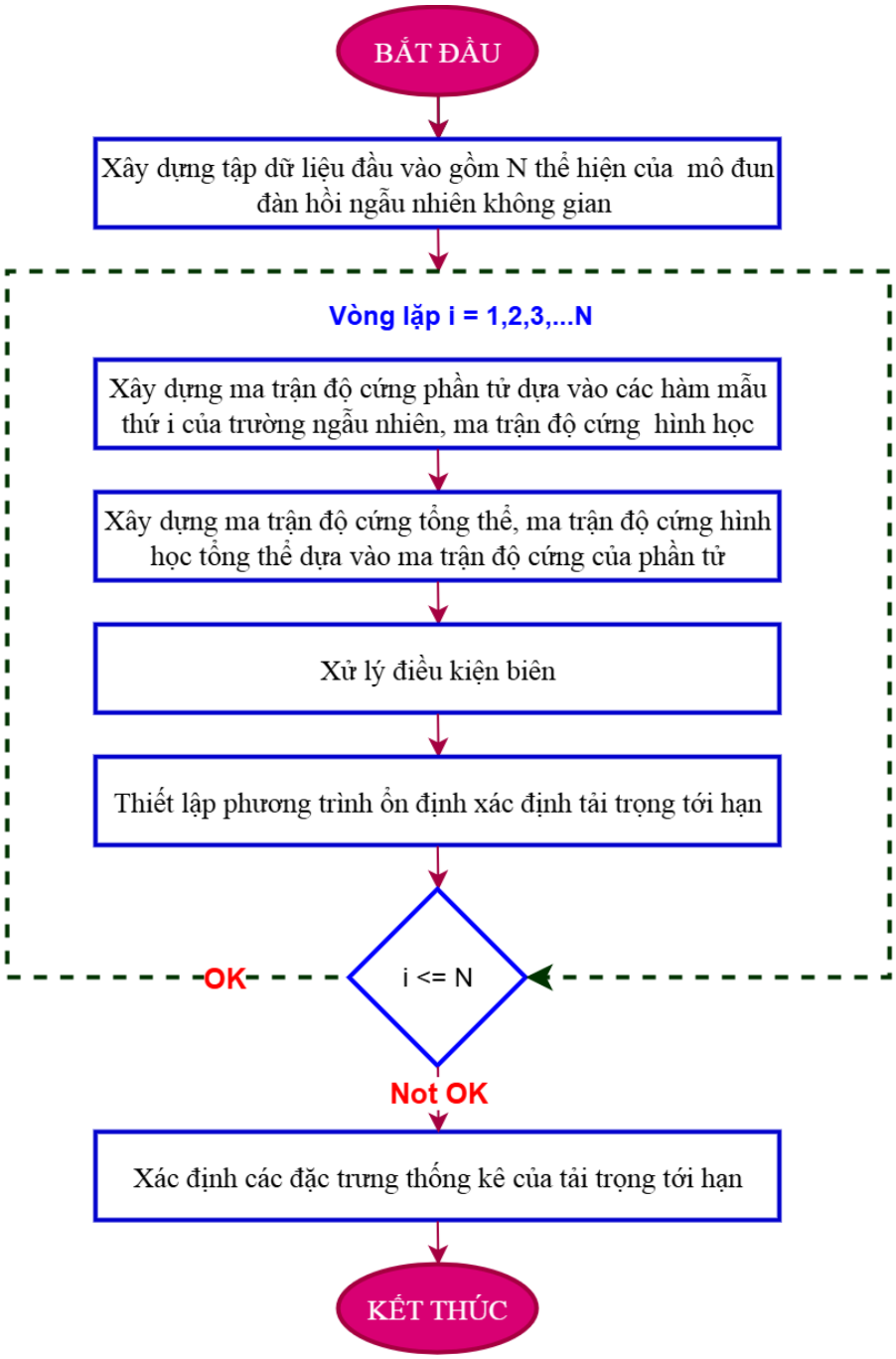
Dựa vào phương trình (3.64) để phân tích nhận được *N* giá trị riêng thứ *k* của lực tới hạn. Xử lý thống kê trên tập dữ liệu nhận được có thể xác định được đặc trưng thống kê của mẫu bao gồm giá trị trung bình và phương sai như các phương trình sau:

$$\overline{\lambda_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \quad (3.65)$$

$$s_{\lambda_k}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i^k - \overline{\lambda_k}\right)^2 \tag{3.66}$$

Hệ số biến thiên của giá trị riêng lực tới hạn được xác định như phương trình (3.67). Hình 3.2 trình bày tổng quát phân tích ổn định ngẫu nhiên bằng MCS.

$$\mathrm{COV} = \frac{\sqrt{s_{\lambda_k}^2}}{\overline{\lambda_k}} \tag{3.67}$$



Hình 3.2. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng MCS

3.4. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

3.4.1. Đối sánh mô hình dầm phẳng và không gian trong phân tích ổn định ngẫu nhiên

Để đánh giá ảnh hưởng của các thành phần ghép bị bỏ qua trong mô hình cột phẳng, luận án thực hiện đối sánh với mô hình phần tử dầm không gian có xét ghép kéo–uốn và uốn hai phương khi mô đun đàn hồi biến thiên ngẫu nhiên trong không gian ba chiều, hệ thống được rời rạc hóa bằng phần tử dầm không gian (12 bậc tự do). Sự thăng giáng không gian của vật liệu trên mặt cắt ngang sinh ra các đặc trưng ngẫu nhiên, bao gồm độ cứng dọc trục $D_0(x,\theta)$, độ cứng uốn $D_{yz}(x,\theta)$, $D_{zz}(x,\theta)$, $D_{yy}(x,\theta)$ và đặc biệt là các mô men tĩnh ngẫu nhiên $S_y(x,\theta)$ và $S_z(x,\theta)$ dẫn đến sự lệch tâm đàn hồi. Ma trận độ cứng đàn hồi $[K]_e$ của phần tử dầm không gian được lắp ráp từ các khối ma trận con tương ứng với các nhóm biến dạng (nén, uốn x-y, uốn x-z, xoắn). Sự hiện diện của $S_y(x,\theta)$ và $S_z(x,\theta)$ kích thích hiệu ứng ghép cặp không gian, thể hiện qua các khối ngoài đường chéo chính. Ma trận độ cứng hình học $[K_P]_e$ mô tả sự suy giảm độ cứng dưới tác dụng của tải trọng dọc trục. Ma trận này có cấu trúc đường chéo khối độc lập, bao gồm khối ma trận độ cứng hình học trong mặt phẳng x-y: $\left[K_P^{xy}\right]_e$, khối ma trận độ cứng hình học trong mặt phẳng x-z: $\left[K_P^{xz}\right]_e$ và ma trận suy giảm độ cứng xoắn $\left[K_{xoan}\right]_e$.

$$\left[K\right]_e = \begin{bmatrix} \left[K_{uu}\right]_e & \left[K_{uv}\right]_e & \left[K_{uw}\right]_e & \left[0\right] \\ \left[K_{uv}\right]_e^T & \left[K_{vv}\right]_e & \left[K_{vw}\right]_e & \left[0\right] \\ \left[K_{uw}\right]_e^T & \left[K_{vw}\right]_e^T & \left[K_{ww}\right]_e & \left[0\right] \\ \left[0\right] & \left[0\right] & \left[0\right] & \left[K_{xoan}\right]_e \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$$\left[K_P\right]_e = \begin{bmatrix} \left[0\right] & \left[0\right] & \left[0\right] & \left[0\right] \\ \left[0\right] & \left[K_P^{xy}\right]_e & \left[0\right] & \left[0\right] \\ \left[0\right] & \left[0\right] & \left[K_P^{xz}\right]_e & \left[0\right] \\ \left[0\right] & \left[0\right] & \left[0\right] & \left[K_P^{xoan}\right]_e \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

Do mặt cắt ngang đối xứng qua các trục hình học và trường mô đun đàn hồi có kỳ vọng không đổi trên mặt cắt, các mômen tĩnh đàn hồi và mômen quán tính ly tâm đàn hồi thỏa mãn ($\mathbb{E}[S_y(x,\theta)] = 0$, $\mathbb{E}[S_z(x,\theta)] = 0$, $\mathbb{E}[D_{yz}(x,\theta)] = 0$). Tuy nhiên, trong từng hiện thực của trường vật liệu, các đại lượng này nhìn chung khác không và có thể gây ra tương tác giữa các thành phần biến dạng. Vì tải trọng tới hạn phụ thuộc vào bài toán trị riêng của hệ, tính chất trung bình bằng không của các thành phần ghép chưa đủ để suy ra rằng ảnh

hưởng của chúng lên các đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn là không đáng kể. Do đó, mức độ ảnh hưởng được đánh giá thông qua đối sánh kết quả của mô hình phẳng và mô hình không gian.

Xét cột chịu nén đúng tâm, liên kết ngàm–tự do, có chiều dài (L = 8m), mặt cắt vuông với ($b = h$ = 0,25m). Mô đun đàn hồi được mô hình hóa bằng trường ngẫu nhiên Gaussian ba chiều, có kỳ vọng ($E_0 = 30\times10^9\ N/m^2$) và hệ số biến thiên bằng 20%. Các đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn được xác định cho ba trường hợp chiều dài tương quan d=0,01L, d=0,1L và d=L. Kết quả đối sánh được trình bày trong Bảng 3.1.

Bảng 3.1 trình bày kết quả đối sánh tải trọng tới hạn của dạng mất ổn định uốn Euler trong mặt phẳng khảo sát (x-y). Đối với mô hình dầm không gian, kết quả được lấy theo nhánh uốn tương ứng với mặt phẳng này, bảo đảm hai mô hình được đối sánh trên cùng đại lượng đáp ứng. Sai khác tương đối về kỳ vọng tải trọng tới hạn nằm trong khoảng 0,517–1,333%, còn sai khác tương đối về độ lệch chuẩn nằm trong khoảng 0,561–2,669%, khi lấy kết quả của mô hình phẳng làm giá trị tham chiếu. Các kết quả này cho thấy sự khác biệt giữa hai mô hình ở mức nhỏ đối với đại lượng tải trọng tới hạn được xét trong các trường hợp tính toán trên. Phép đối sánh cung cấp bằng chứng định lượng hỗ trợ việc sử dụng mô hình phẳng để phân tích các đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn trong cấu hình đã kiểm tra.

Bảng 3.1. So sánh đặc trưng thống kê của lực tới hạn theo mô hình dầm phẳng và dầm không gian

Chiều dài tương quan	**Kỳ vọng của lực tới hạn (*kN*)**			**Độ lệch chuẩn lực tới hạn (*kN*)**		
	Dầm phẳng	Dầm không gian	% Sai khác	Dầm phẳng	Dầm không gian	% Sai khác
d = 0,01L	373,558	368,578	1,333	5,882	5,725	2,669
d = 0,1L	367,377	362,725	1,266	32,928	32,453	1,443
d = L	373,406	371,477	0,517	65,776	65,407	0,561

3.4.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên lực tới hạn theo lưới chia phần tử

Xét cột chịu nén đúng tâm có chiều dài L = 8 m, mặt cắt ngang hình vuông $b = h$ = 0,25 m, được khảo sát trong bốn điều kiện biên khác nhau: ngàm–ngàm (C – C), ngàm–khớp (C – H), khớp–khớp (H – H) và ngàm–tự do (C – F). Mô đun đàn hồi được mô hình hóa thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều) dưới dạng trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng. Hàm tự hiệp phương sai của E ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.70), tương tự như (3.71) trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều với giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi $E_0 = 30\times10^9\ N/m^2$. Độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên σ_f = 0,05, chiều dài

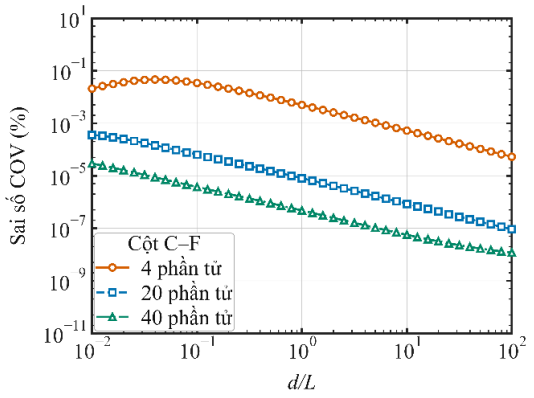
tương quan không gian: $d_x = d_y = d_z = d$ với d thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$.

$$C_{EE}\left(\xi_1,\xi_2\right) = E_0^2\sigma_f^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y}\right] \tag{3.70}$$

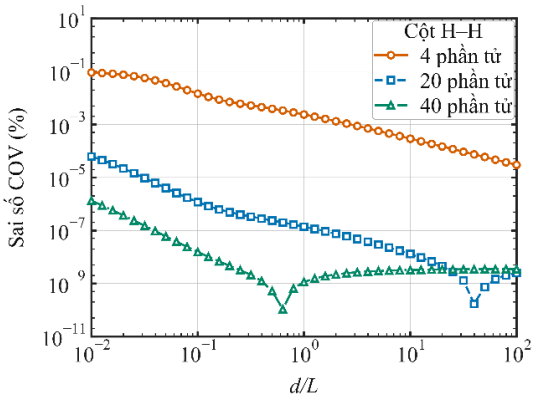
$$C_{EE}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right) = E_0^2\sigma_f^2 \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z}\right] \tag{3.71}$$

Sự hội tụ theo lưới của hệ số biến động (COV) lực tới hạn được đánh giá với các lưới có số phần tử (N_e = 4, 20, 40 và 80). Lưới 80 phần tử được sử dụng làm tham chiếu để xác định sai số tương đối của COV. Hình 3.3 và Hình 3.4 lần lượt trình bày sai số này đối với các trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.

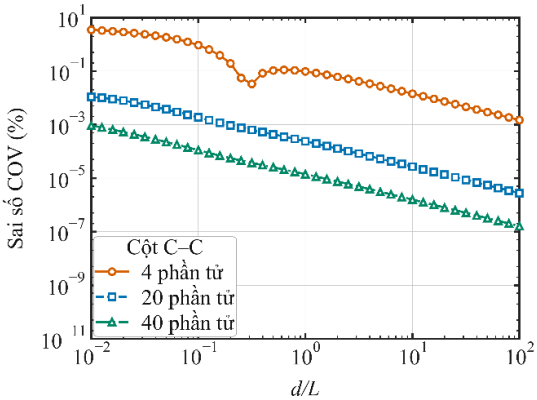
Kết quả cho thấy sai số của COV trong phạm vi khảo sát giảm rõ rệt khi tăng số phần tử. Với lưới 40 phần tử, sai số tương đối so với lưới 80 phần tử nhỏ hơn 10^{-3} % tại toàn bộ các điểm khảo sát, đối với cả bốn điều kiện biên và hai mô hình trường ngẫu nhiên. Kết quả này cho thấy COV của lực tới hạn đã đạt mức độ ổn định cao theo lưới trong phạm vi khảo sát. Do đó, lưới (N_e = 40) được lựa chọn cho các phân tích tiếp theo nhằm bảo đảm mức độ hội tụ theo lưới và giảm chi phí tính toán.



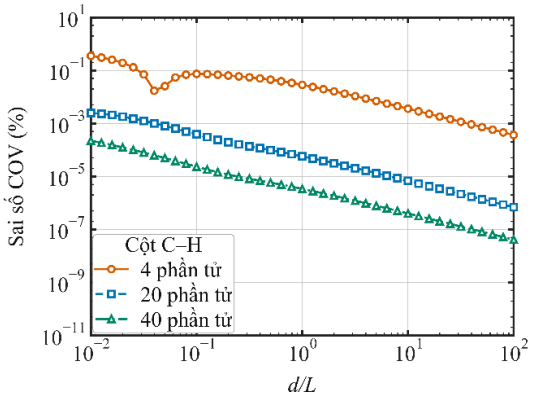
a, Cột C - F



b, Cột H - H

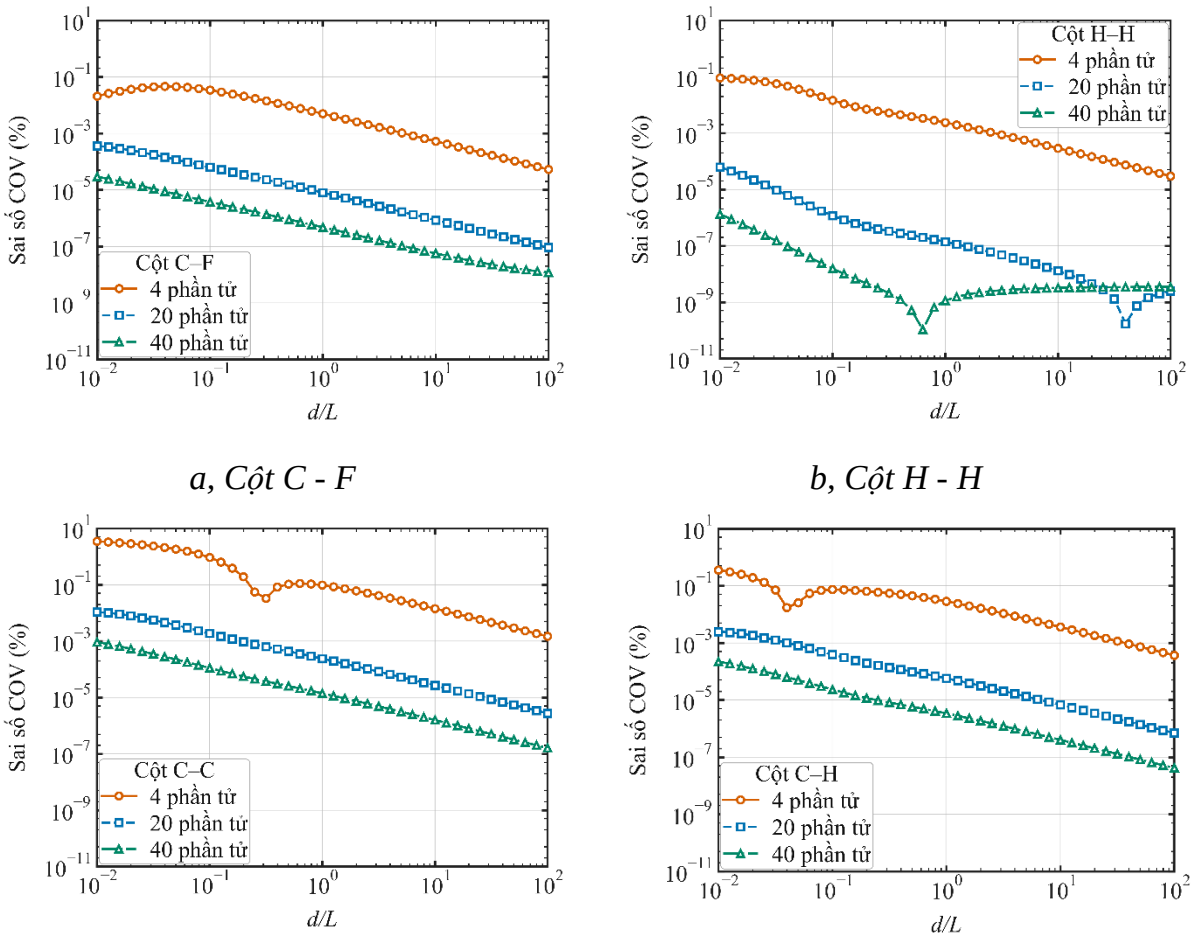


c, Cột C - C



d, Cột C - H

Hình 3.3. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của lực tới hạn khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử



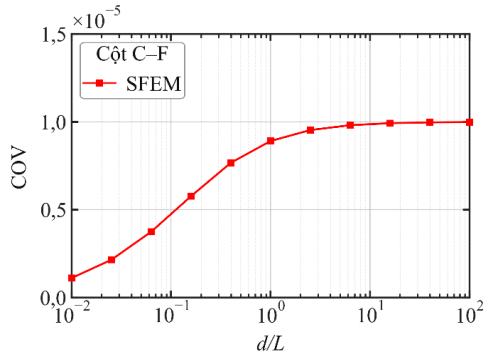
a, Cột C - F *b, Cột H - H*

c, Cột C - C *d, Cột C - H*

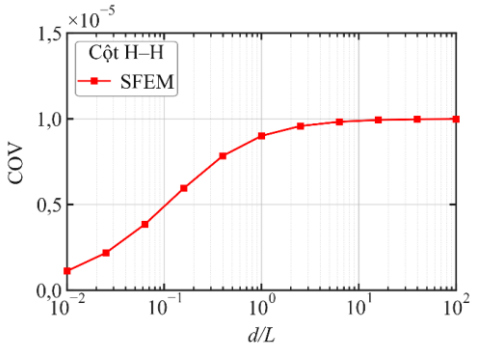
Hình 3.4. Khảo sát hội tụ lưới đối với COV của lực tới hạn khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều, sai số tương đối được xác định so với lưới 80 phần tử

3.4.3. Kiểm tra mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên

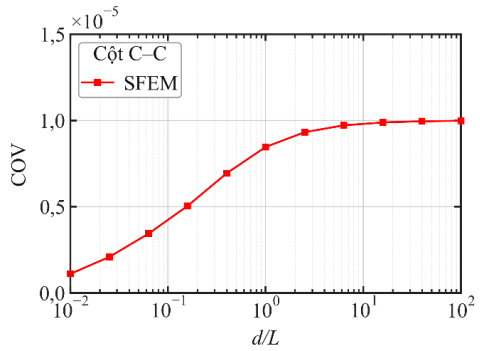
Khi mô đun đàn hồi của vật liệu được giả định là trường ngẫu nhiên có độ lệch chuẩn rất nhỏ, bài toán khi đó tiệm cận bài toán tất định. Hệ quả là thành phần ngẫu nhiên của cột tiến dần đến 0, cụ thể là COV của lực tới hạn, cũng phải có giá trị rất nhỏ, và ứng xử của cột gần như tất định. Với độ lệch chuẩn σ_f = 0,00001, COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều, ba chiều được thể hiện trong Hình 3.5 và Hình 3.6. Kết quả cho thấy, khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên giảm đến giá trị rất nhỏ, biến thiên của đáp ứng ngẫu nhiên của cột cũng giảm tương ứng, phản ánh đúng bản chất vật lý của bài toán ngẫu nhiên và sự phù hợp với lý thuyết tính toán ngẫu nhiên. Điều này khẳng định rằng mô hình SFEM được xây dựng có độ tin cậy và đảm bảo tính chính xác khi áp dụng cho bài toán phân tích cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian.



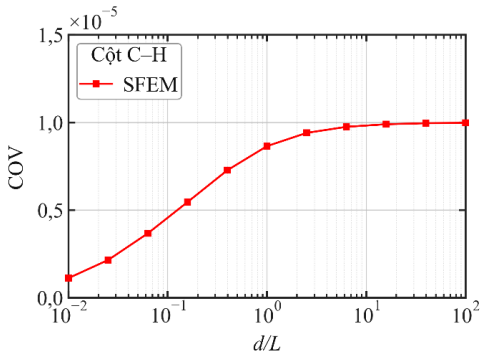
a, Cột C - F



b, Cột H - H

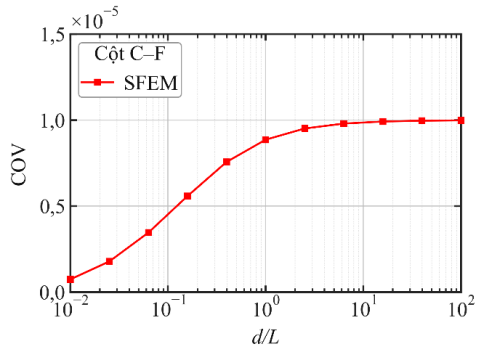


c, Cột C - C

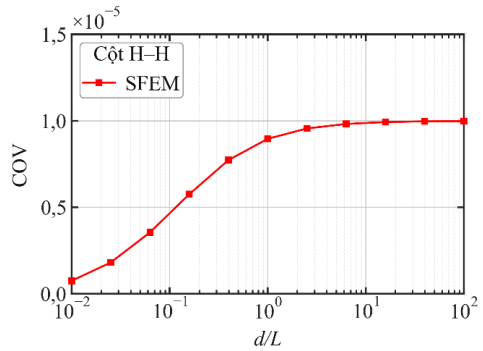


d, Cột C - H

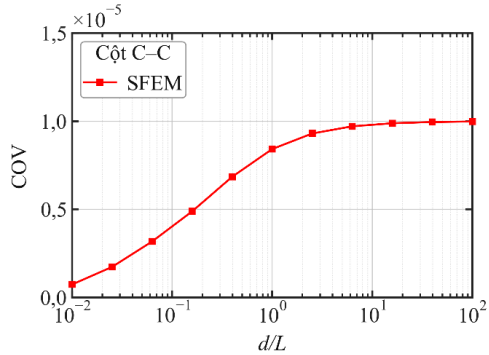
Hình 3.5. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều



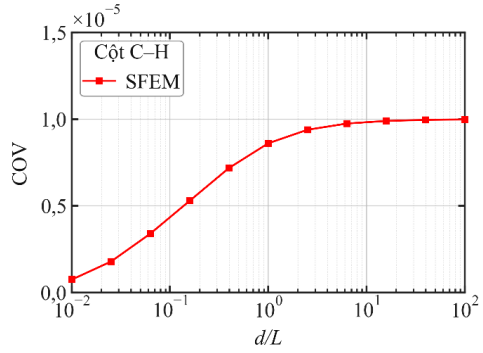
a, Cột C - F



b, Cột H - H



c, Cột C - C



d, Cột C - H

Hình 3.6. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

3.4.4. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố

Trong tài liệu [136] các tác giả đã nghiên cứu ổn định của cột chịu nén đúng tâm có liên kết khớp tại hai đầu với độ cứng thay đổi ngẫu nhiên một chiều bằng kỹ thuật nhiễu bậc hai kết hợp phương pháp biểu diễn chuỗi trực giao. Trong bối cảnh kích thước hình học được xem xét là tất định thì sự thay đổi ngẫu nhiên một chiều của độ cứng tương ứng với mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên một chiều dọc theo chiều dài cột. Kết quả thu được từ nghiên cứu này được sử dụng để đối chiếu và kiểm chứng với phương pháp SFEM được phát triển trong luận án, khi mô đun đàn hồi được xét như một trường ngẫu nhiên không gian có chiều dài tương quan theo trục x trùng với giá trị trong [136], trong khi chiều dài tương quan theo các trục còn lại (y và z) được chọn rất lớn ($100L$) nhằm làm suy yếu ảnh hưởng ngẫu nhiên theo các phương này. Khi đó, ứng xử ngẫu nhiên của trường không gian trở nên tương đương với trường ngẫu nhiên một chiều, cho phép đánh giá tính phù hợp và độ tin cậy của mô hình SFEM đối chiếu với kết quả phân tích đã được công bố.

Xét cột chịu nén đúng tâm liên kết khớp ở hai đầu có các kích thước hình học: L = 2 m, b = h = 0,3 m. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian có hàm tự tương quan như các phương trình (3.70) và (3.71). Giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi $E_0 = 30\times10^9\ N/m^2$. Quan hệ giữa lực tới hạn chuẩn hóa và lực tới hạn chuẩn hóa không thứ nguyên được sử dụng trong tài liệu [136] được xác định thông qua phương trình sau:

$$\frac{P_{cr}}{P_{cr}^0} = \frac{1}{\pi^2} \times \frac{P_{cr}L^2}{m_{EI}} = \frac{1}{\pi^2} \times \frac{P_{cr}L^2}{E_0 I} \tag{3.72}$$

Với P_{cr} là lực tới hạn xét đến tính ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi, P_{cr}^0 là lực tới hạn của bài toán tất định, m_{EI} là giá trị kỳ vọng của độ cứng chống uốn. Bảng 3.2 thể hiện giá trị kỳ vọng của lực tới hạn không thứ nguyên được xác định trong tài liệu [136]. Sử dụng phương trình (3.72) có thể xác định được kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa như Bảng 3.2 đồng thời kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa được so sánh với kết quả phân tích bằng SFEM như Bảng 3.3. Bên cạnh đó, Bảng 3.4 thể hiện so sánh COV của lực tới hạn chuẩn hóa được xác định bằng SFEM đề xuất trong luận án và công bố trong tài liệu [136].

Kết quả phân tích và so sánh cho thấy tồn tại sai lệch nhỏ giữa kết quả phân tích bằng SFEM với kết quả đã công bố, tuy nhiên sai số này ở mức thấp (dưới 5%). Một trong những nguyên nhân dẫn đến sai khác này nằm ở phương pháp được lựa chọn để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên cũng như kỹ thuật để lan truyền tính ngẫu nhiên vào trong hệ thống. Kết quả kiểm chứng không chỉ cho thấy tính chính xác cũng như độ tin cậy của SFEM được đề xuất mà còn thể hiện tính linh hoạt của SFEM khi được mở rộng phân tích cho bài toán có

yếu tố đầu vào ngẫu nhiên không gian thì hoàn toàn có thể sử dụng để phân tích cho bài toán có yếu tố đầu vào ngẫu nhiên một chiều.

Bảng 3.2. Kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa không thứ nguyên theo [136]

Mô đun đàn hồi, chiều dài tương quan	**σ_f = 0,1**	**σ_f = 0,2**
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x/L = 0,5$	9,836	9,740
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x/L = 4$	9,865	9,849

Bảng 3.3. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]

Mô đun đàn hồi, chiều dài tương quan	**σ_f = 0,1**	**σ_f = 0,2**
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x/L = 0,5$; [136]	0,9966	0,9869
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x/L = 0,5$; $d_y = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x/L = 0,5$; $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000
Sai số (%)	**0,34**	**1,33**
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x/L = 4$; [136]	0,9995	0,9979
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x/L = 4$, $d_y = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x/L = 4$, $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000
Sai số (%)	**0,05**	**0,21**

Bảng 3.4. So sánh COV của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]

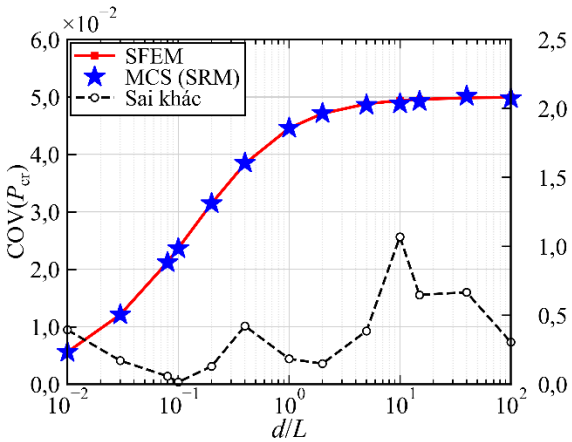
Mô đun đàn hồi, chiều dài tương quan	**σ_f = 0,1**	**σ_f = 0,2**
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x/L = 0,5$; [136]	0,085	0,171
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x/L = 0,5$; $d_y = 100L$, [Luận án]	0,083013	0,166026
Sai số (%)	**2,3%**	**2,9%**
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x/L = 0,5$;$d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	0,082992	0,165984
Sai số (%)	**2,4%**	**2,9%**
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x/L = 4$; [136]	0,097	0,196
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x/L = 4$; $d_y = 100L$, [Luận án]	0,097452	0,194905
Sai số (%)	**0,5%**	**0,5%**
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x/L = 4$; $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	0,097428	0,194856
Sai số (%)	**0,4%**	**0,5%**

3.4.5. So sánh kết quả phân tích ổn định Euler của cột bằng phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo

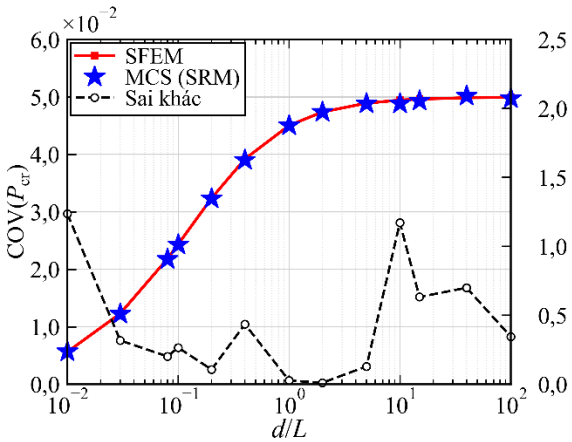
Mô phỏng Monte Carlo (MCS) được xây dựng độc lập để kiểm chứng kết quả SFEM, kết hợp phương pháp biểu diễn phổ (SRM) với phương pháp phần tử hữu hạn tiêu chuẩn. Trong khảo sát này, mô đun đàn hồi được mô hình hóa bằng trường ngẫu nhiên

Gaussian không gian có COV_E = 0,05. SRM được sử dụng để tạo các thể hiện của trường vật liệu, tái tạo xấp xỉ phương sai và cấu trúc tương quan không gian thông qua hàm mật độ phổ. Khảo sát xét bốn điều kiện liên kết ngàm–ngàm, ngàm–khớp, khớp–khớp và ngàm–tự do. Với mỗi thể hiện của trường vật liệu, bài toán trị riêng ổn định được giải bằng FEM tiêu chuẩn để xác định lực tới hạn nhỏ nhất (P_{cr}). Tập kết quả thu được được xử lý thống kê nhằm xác định kỳ vọng, độ lệch chuẩn và COV của lực tới hạn.

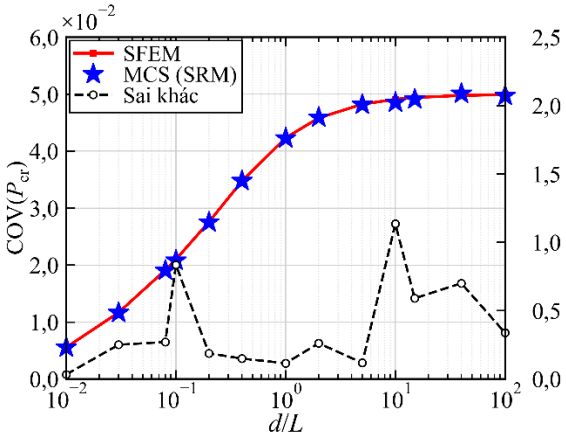
Kết quả khảo sát cho thấy COV của lực tới hạn có xu hướng tăng theo chiều dài tương quan và tiến gần giá trị COV của mô đun đàn hồi khi chiều dài tương quan đủ lớn. Khi chiều dài tương quan nhỏ, mô đun đàn hồi biến đổi nhanh theo vị trí, nhưng phương sai tại một điểm vẫn giữ nguyên theo mức COV đầu vào đã chọn. Sự trung bình hóa các biến thiên vật liệu trong đáp ứng tổng thể làm COV của lực tới hạn nhỏ hơn COV của mô đun đàn hồi. Khi chiều dài tương quan tăng, các biến thiên vật liệu tại những vị trí khác nhau có mức độ đồng biến cao hơn, làm tăng mức độ phân tán của lực tới hạn. Điều kiện liên kết ảnh hưởng đến COV thông qua dạng mất ổn định và sự phân bố độ nhạy của đáp ứng đối với trường vật liệu. Sai khác tương đối về COV của lực tới hạn giữa SFEM và MCS được xác định bằng trị tuyệt đối của chênh lệch, lấy kết quả MCS làm giá trị tham chiếu. Với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều, sai khác lớn nhất là 1,2368%, xuất hiện ở cột khớp–khớp tại d/L = 0,01; sai khác trung bình là 0,3910%. Với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, các giá trị tương ứng là 2,3260% và 0,5931%; sai khác lớn nhất xuất hiện ở cột ngàm–tự do tại d/L = 0,2. Các kết quả cho thấy sự phù hợp giữa SFEM và MCS trong khảo sát tải mất ổn định uốn phẳng Euler với COV của mô đun đàn hồi bằng 0,05.



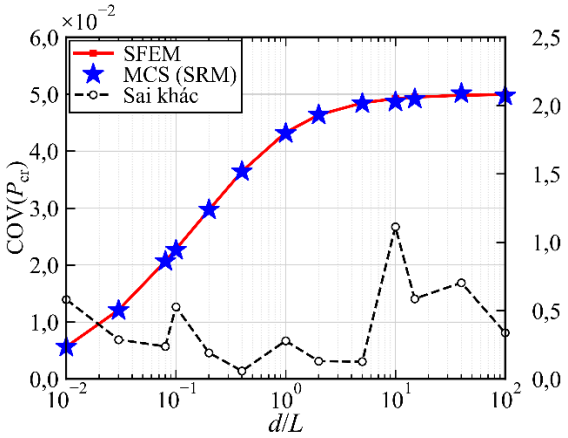
a, Cột C – F, $d_x = d_y = d$



b, Cột H – H, $d_x = d_y = d$

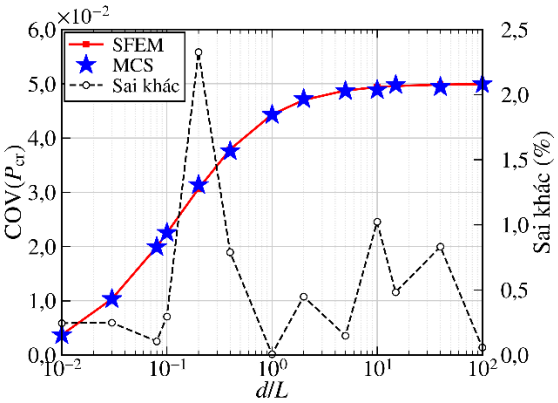


c, Cột C – C, $d_x = d_y = d$

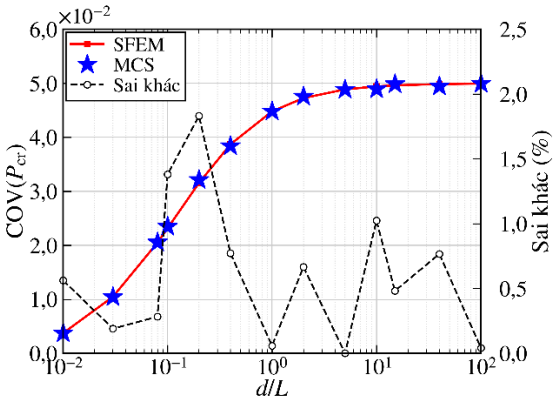


d, Cột C – H, $d_x = d_y = d$

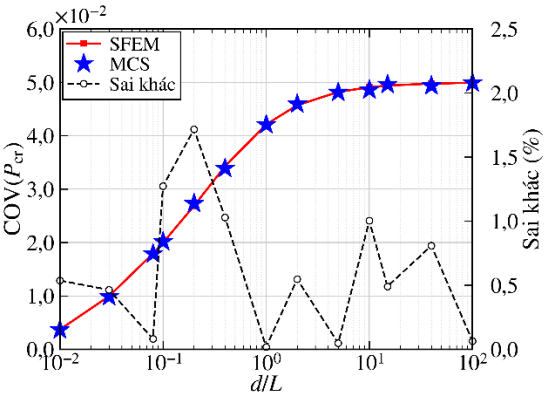
Hình 3.7. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều



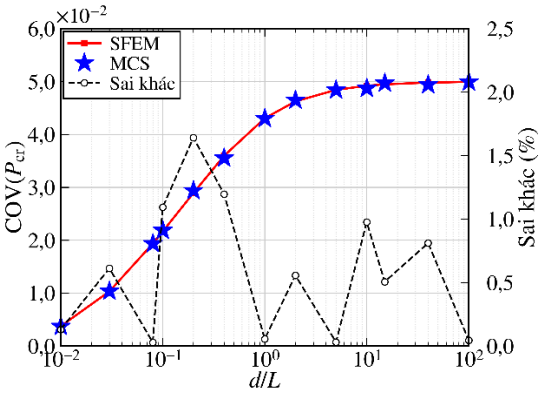
a, Cột C – F, $d_x = d_y = d_z = d$



b, Cột H – H, $d_x = d_y = d_z = d$



c, Cột C – C, $d_x = d_y = d_z = d$

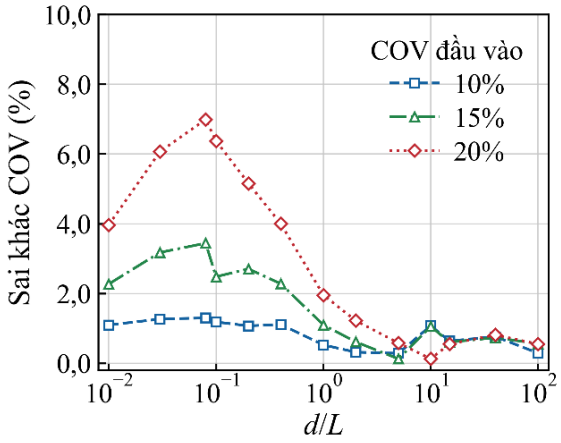


d, Cột C – H, $d_x = d_y = d_z = d$

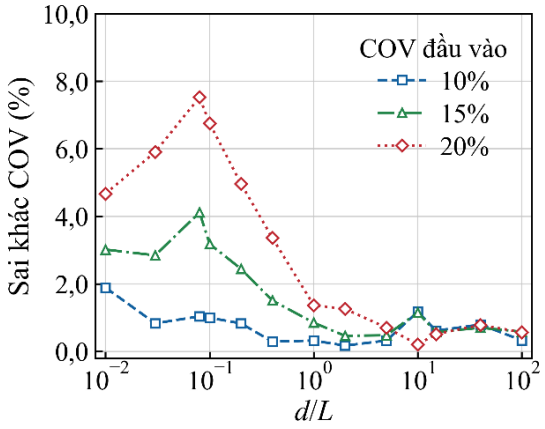
Hình 3.8. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Khi mở rộng khảo sát sang các mức COV của mô đun đàn hồi lớn hơn, COV của lực tới hạn và sai khác tương đối về COV giữa SFEM với MCS sử dụng SRM nhìn chung

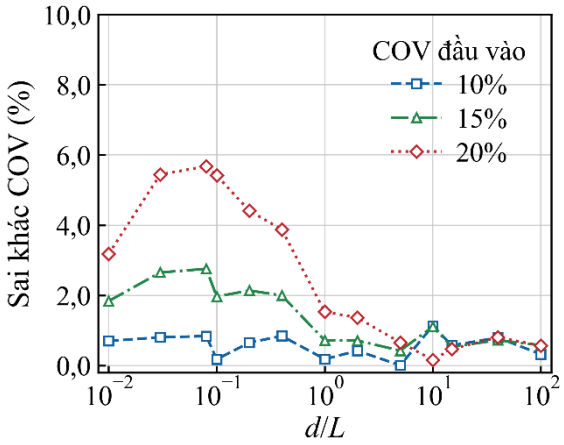
tăng. Đối với cả trường vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều, kết quả tính trên tập mẫu MCS hợp lệ cho thấy sai khác về COV tại các mức COV đầu vào 10% và 15% đều nhỏ hơn 5%. Khi COV đầu vào tăng lên 20%, một số cấu hình có sai khác vượt 5%, nhưng giá trị lớn nhất vẫn dưới 8% trong phạm vi khảo sát như Hình 3.9 và Hình 3.10 . Mức sai khác còn phụ thuộc vào chiều dài tương quan và điều kiện liên kết của cột. Xu hướng này phù hợp với giới hạn của xấp xỉ nhiễu bậc nhất khi mức biến thiên của vật liệu tăng, cho thấy cần đánh giá độ chính xác theo từng cấu hình khảo sát.



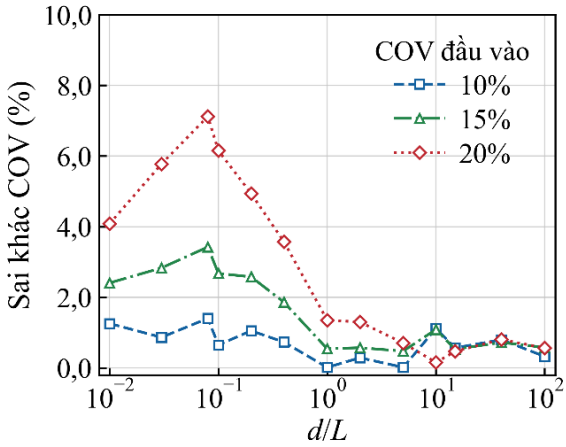
a, Cột C – F, $d_x = d_y = d$



b, Cột H – H, $d_x = d_y = d$

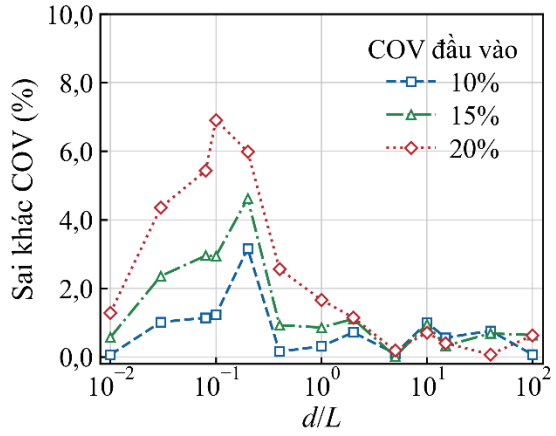


c, Cột C – C, $d_x = d_y = d$

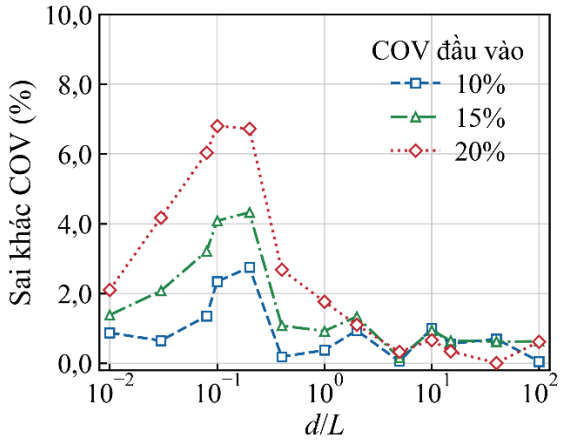


d, Cột C – H, $d_x = d_y = d$

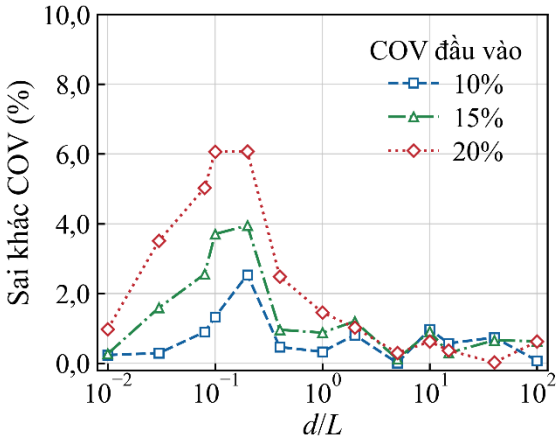
Hình 3.9. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong các trường hợp COV_E của trường mô đun ngẫu nhiên hai chiều



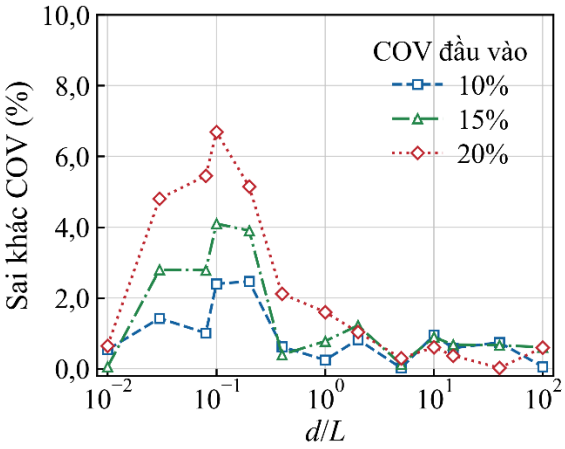
a, Cột C – F, $d_x = d_y = d_z = d$



b, Cột H – H, $d_x = d_y = d_z = d$



c, Cột C – C, $d_x = d_y = d_z = d$



d, Cột C – H, $d_x = d_y = d_z = d$

Hình 3.10. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong các trường hợp COV_E của trường mô đun ngẫu nhiên ba chiều

3.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG III

Kế thừa nền tảng kỹ thuật tích phân trọng số đã được phát triển trong Chương II, khung lý thuyết SFEM đã được mở rộng và phát triển trong Chương III nhằm giải quyết bài toán phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm, xét đến sự biến thiên ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi *E*. Các kết quả và đóng góp cốt lõi bao gồm:

Về xây dựng và phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên

- ✓ **Thiết lập chuỗi xấp xỉ Taylor bậc nhất:** Kỹ thuật nhiễu loạn đã được tích hợp thành công để thiết lập chuỗi xấp xỉ Taylor bậc nhất cho tải trọng tới hạn. Kỹ thuật này cho phép lan truyền trực tiếp tính bất định không gian của tính chất vật liệu vào đáp ứng ổn định Euler ngẫu nhiên của cột.

- ✓ **Xác định đặc trưng thống kê:** Mô hình SFEM được phát triển cho phép xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê bậc thấp của lực tới hạn (kỳ vọng, phương sai, COV) mà không cần thực hiện mô phỏng lặp lại nhiều lần.

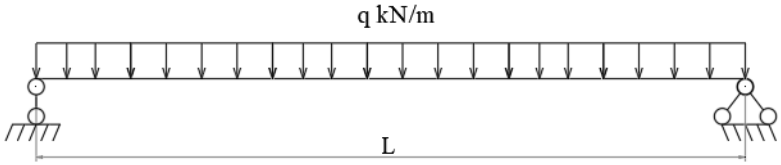
Về kiểm chứng độ tin cậy và tính chính xác: Mô hình SFEM cho bài toán ổn định Euler ngẫu nhiên của cột đã được kiểm định nghiêm ngặt qua các tiêu chí:

- ✓ **Sự hội tụ:** Kết quả phân tích chỉ ra rằng COV của lực tới hạn hội tụ ổn định và hoàn toàn không phụ thuộc vào mật độ lưới chia khi số lượng phần tử đạt ngưỡng đủ lớn.
- ✓ **Tính nhất quán với lý thuyết tính toán ngẫu nhiên:** Khi độ biến thiên của thông số đầu vào tiến về không, đáp ứng ngẫu nhiên của cột tiệm cận chính xác về kết quả của bài toán tất định, phản ánh đúng bản chất vật lý và cơ học của hệ thống.
- ✓ **Độ chính xác:** Quá trình đối sánh chéo với các nghiên cứu trước và phương pháp mô phỏng MCS cho thấy phù hợp khẳng định tính chính xác và độ tin cậy của mô hình SFEM được phát triển.

CHƯƠNG IV: KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC YẾU TỐ TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN ĐẶC TRƯNG THỐNG KÊ ĐÁP ỨNG CỦA DẦM, CỘT

4.1. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐÁP ỨNG TĨNH NGẪU NHIÊN CỦA DẦM CÓ MÔ ĐUN ĐÀN HỒI NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

Xét dầm giản đơn có chiều dài nhịp $L = 5\ m$, mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao $h = 0{,}4\ m$, bề rộng $b = 0{,}25\ m$ như Hình 4.1. Dầm chịu tải trọng phân bố đều $q = 10\ kN/m$. Dầm có E và ρ thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều). Với giá trị kỳ vọng của E và ρ lần lượt: $E_0 = 30\times10^9\ N/m^2$, $\rho_0 = 2400\ kg/m^3$. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Các chiều dài tương quan theo các trục trong không gian thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$.



Hình 4.1. Sơ đồ dầm giản đơn

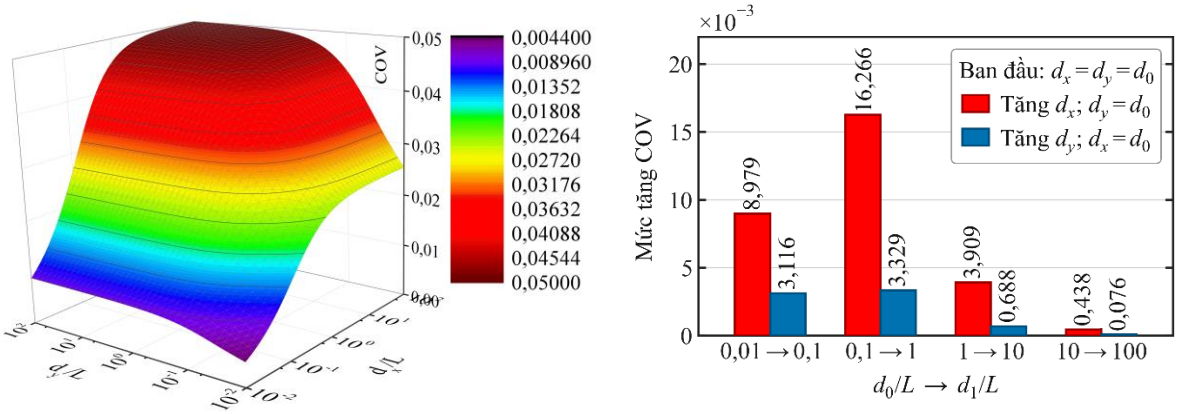
4.1.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên

4.1.1.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Chiều dài tương quan d_x và d_y được thay đổi độc lập từ $0{,}01L$ đến $100L$ để khảo sát COV của chuyển vị giữa nhịp như Hình 4.2. Kết quả cho thấy COV tăng theo quan hệ phi tuyến và dần bão hòa. Khi chiều dài tương quan nhỏ, biến thiên tính chất vật liệu giữa các vùng ít tương quan với nhau, làm giảm độ phân tán của chuyển vị nhờ hiệu ứng trung bình hóa không gian. Khi chiều dài tương quan tăng, các vùng vật liệu biến thiên đồng bộ hơn, hiệu ứng này suy giảm và COV tăng.

Khi tăng riêng d_x hoặc d_y cùng một lượng từ cùng trạng thái ban đầu, bốn cặp so sánh cho thấy mức tăng COV theo d_x lớn gấp 2,88 đến 5,74 lần theo d_y. Kết quả này phù hợp với đặc điểm chiều cao tiết diện h nhỏ hơn nhiều so với chiều dài dầm L. Khi cùng chuẩn hóa theo L, tương quan theo chiều cao tiết diện đạt trạng thái gần đồng bộ sớm hơn, nên ảnh hưởng của việc tiếp tục tăng d_y giảm nhanh hơn. Khi d_x lớn hơn nhiều so với L và đồng thời d_y lớn hơn nhiều so với h, mô đun đàn hồi gần như một biến ngẫu nhiên chung

cho toàn dầm. Trong xấp xỉ SFEM bậc nhất, COV của chuyển vị khi đó tiệm cận COV của mô đun đàn hồi, bằng 0,05 trong trường hợp khảo sát.



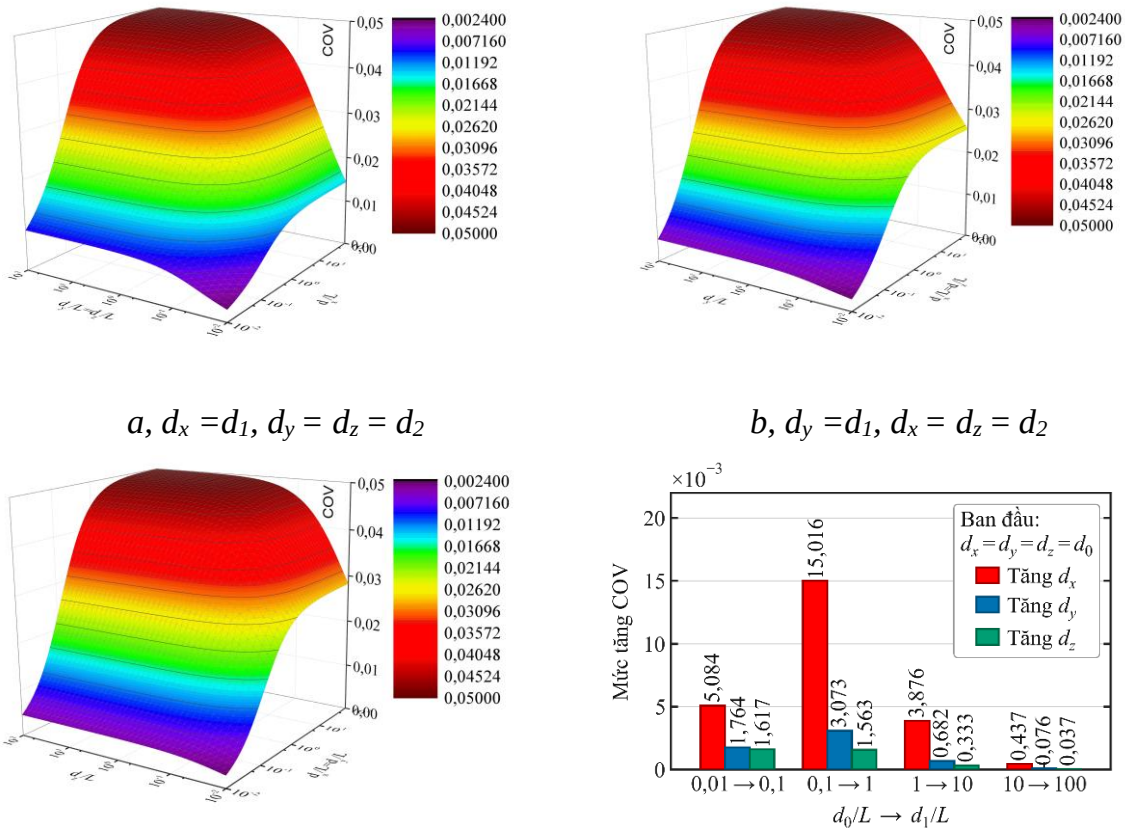
Hình 4.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian hai chiều đến COV của chuyển vị

4.1.1.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Để khảo sát ảnh hưởng của chiều dài tương quan không gian đến COV của chuyển vị tại giữa nhịp, ba trường hợp được xem xét gồm: $d_x = d_1$, $d_y = d_z = d_2$; $d_y = d_1$, $d_x = d_z = d_2$; $d_z = d_1$, $d_x = d_y = d_2$ với d_1, d_2 thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$ tương ứng với trường hợp $\sigma_f = 0{,}05$. Kết quả khảo sát được trình bày trong Hình 4.3.

COV của chuyển vị tăng theo chiều dài tương quan trong cả ba trường hợp, nhưng mối quan hệ này không tuyến tính. Khi chiều dài tương quan nhỏ, các vùng vật liệu tương quan yếu với nhau, nên hiệu ứng trung bình hóa không gian làm giảm mức phân tán của chuyển vị. Khi chiều dài tương quan tăng, biến động vật liệu trở nên đồng bộ hơn trên phạm vi kết cấu, làm suy giảm hiệu ứng trung bình hóa và tăng COV của đáp ứng. Cụ thể, khi $d_x = d_y = d_z = d$, chiều dài tương quan tăng từ khoảng $0{,}0316L$ đến $0{,}0794L$, tương ứng tăng 2,51 lần, thì COV tăng từ 0,00856 lên 0,01812, tương ứng tăng khoảng 2,12 lần. Trong khi đó, với cùng mức tăng chiều dài tương quan khoảng 2,51 lần, từ $39{,}81L$ đến $100L$, COV chỉ tăng từ 0,049845 lên 0,049938, tương ứng khoảng 0,19%. Kết quả này cho thấy ảnh hưởng của việc tăng chiều dài tương quan giảm rõ rệt khi trường vật liệu tiến gần trạng thái tương quan hoàn toàn.

Biểu đồ cột trong Hình 4.3.*d* cho thấy, khi xuất phát từ cùng trạng thái ban đầu và tăng riêng từng chiều dài tương quan cùng một lượng trong mỗi nhóm so sánh, mức tăng COV lớn nhất ứng với d_x, tiếp đến d_y và d_z. Xu hướng này phù hợp với hình học dầm khảo sát: chiều cao và chiều rộng nhỏ hơn nhiều chiều dài, nên tương quan vật liệu theo hai phương mặt cắt tiến đến trạng thái gần đồng nhất sớm hơn theo phương dọc dầm.



a, $d_x = d_1$, $d_y = d_z = d_2$

b, $d_y = d_1$, $d_x = d_z = d_2$

c, $d_z = d_1$, $d_x = d_y = d_2$

d, Ảnh hưởng của chiều dài tương quan

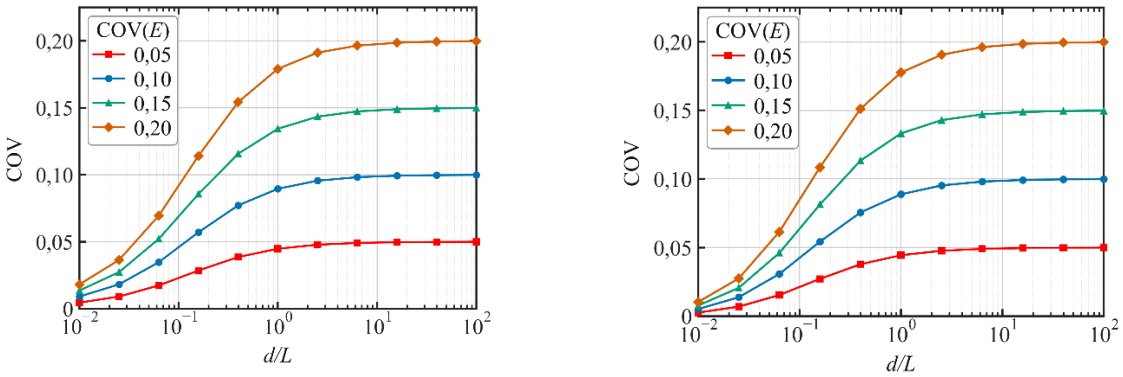
Hình 4.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều đến COV của chuyển vị

4.1.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên của chuyển vị

Trong mô hình mô đun đàn hồi ngẫu nhiên $E = E_0(1 + f)$, với f là trường biến động tương đối có kỳ vọng bằng không, COV của mô đun đàn hồi bằng độ lệch chuẩn σ_f. Các khảo sát bốn mức σ_f gồm 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20, với $d_x = d_y = d$ đối với trường ngẫu nhiên hai chiều và $d_x = d_y = d_z = d$ đối với trường ngẫu nhiên ba chiều. Chiều dài tương quan d thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$. Ở cả hai trường hợp, với chiều dài tương quan cố định, COV của chuyển vị tỉ lệ thuận với COV của mô đun đàn hồi. Đây là hệ quả của xấp xỉ nhiễu bậc nhất. Đồng thời, khoảng cách giữa các đường biểu diễn tăng theo chiều dài tương quan, cho thấy cùng một mức tăng của σ_f gây ra mức tăng COV chuyển vị lớn hơn khi biến động vật liệu có tính tương quan cao được thể hiện trong Hình 4.4.

Khi chiều dài tương quan nhỏ, hiệu ứng trung bình hóa không gian làm giảm mức phân tán của chuyển vị. Trường ngẫu nhiên ba chiều cho COV thấp hơn trường hai chiều do có thêm sự trung bình hóa theo phương z. Khi chiều dài tương quan tăng, biến động vật liệu trở nên đồng bộ hơn trên toàn dầm, khiến COV tăng và dần tiến đến trạng thái bão

hòa. Trong giới hạn chiều dài tương quan rất lớn, COV của chuyển vị trong mô hình nhiễu bậc nhất tiệm cận σ_f ở cả hai trường hợp, đồng thời sự khác biệt giữa ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều giảm dần.

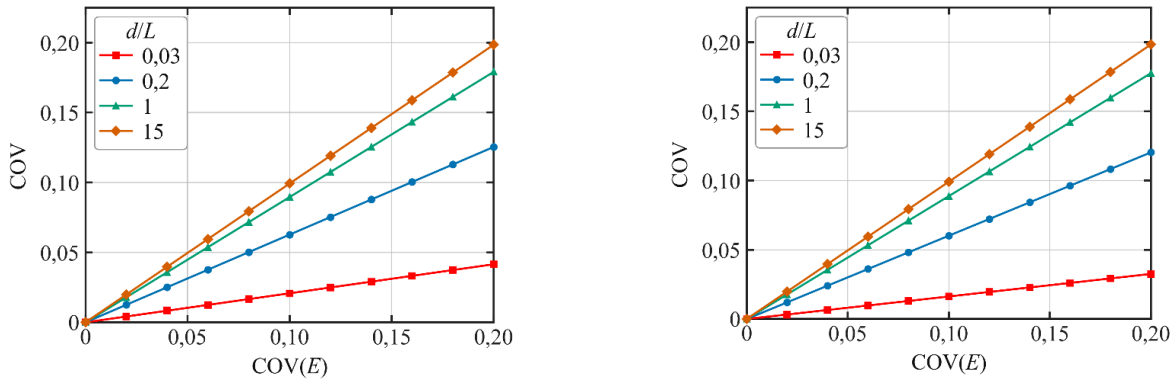


a, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều *b, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều*

Hình 4.4. Ảnh hưởng của COV trường ngẫu nhiên *E* đến COV của chuyển vị

4.1.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của chuyển vị và hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian

Hình 4.5 thể hiện kết quả khảo sát của quan hệ giữa COV và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều (COV của mô đun đàn hồi) tương ứng với bốn trường hợp của chiều dài tương quan trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều: $d_x = d_y = d$ *với* $d = 0{,}03L$, $d = 0{,}2L$, $d = 1L$ và $d = 15L$. Tương tự trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều: $d_x = d_y = d_z = d$ *với* $d = 0{,}03L$, $d = 0{,}2L$, $d = 1L$ và $d = 15L$. Khi chiều dài tương quan, hình học, tải trọng và giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi được giữ cố định, COV chuyển vị xác định bằng SFEM bậc nhất tỷ lệ thuận với COV mô đun đàn hồi. Quan hệ này là hệ quả của khai triển đáp ứng bậc nhất. Các đường trong Hình 4.5 thể hiện sự khác biệt về hệ số tỷ lệ ứng với các chiều dài tương quan và số chiều của trường ngẫu nhiên.



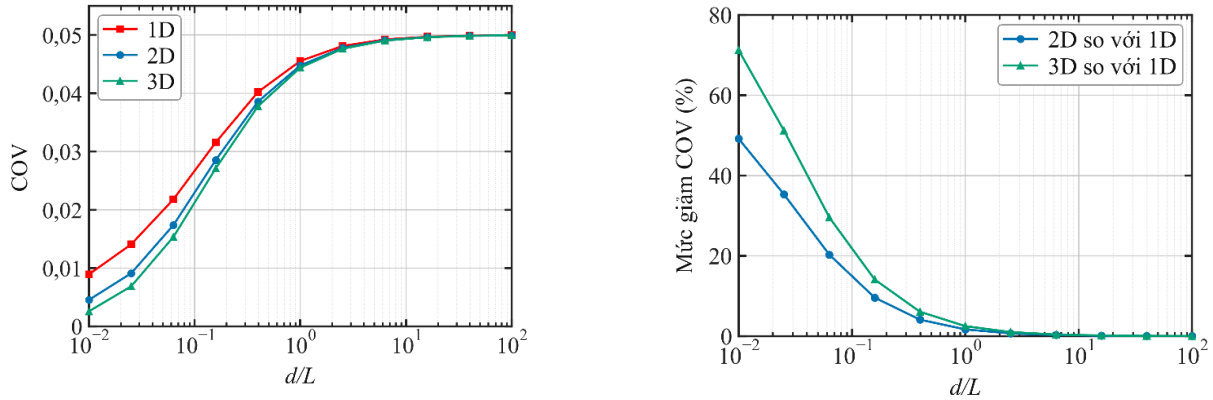
a, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều *b, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều*

Hình 4.5. Quan hệ giữa COV của chuyển vị và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên

4.1.4. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Hình 4.6 so sánh COV của chuyển vị giữa nhịp khi mô đun đàn hồi được mô tả bằng trường ngẫu nhiên 1D, 2D và 3D, với cùng $COV_E = 0{,}05$. Chiều dài tương quan theo các trục được lấy bằng nhau và thay đổi từ $0{,}01L$ đến $100L$ nhằm làm rõ ảnh hưởng của số chiều ngẫu nhiên. Khi chiều dài tương quan nhỏ, COV của chuyển vị giảm rõ rệt khi tăng số chiều ngẫu nhiên. Tại $d = 0{,}01L$, COV của các mô hình trường ngẫu nhiên 1D, 2D và 3D lần lượt bằng 0,00891; 0,00453 và 0,00256. So với mô hình trường ngẫu nhiên 1D, COV của mô hình trường ngẫu nhiên 2D và 3D giảm tương ứng 49,17% và 71,22%. Về cơ học, các vùng vật liệu có tương quan yếu đóng góp vào độ cứng tổng thể thông qua tích phân không gian. Việc xét thêm biến thiên theo các phương ngang tiết diện làm tăng hiệu ứng trung bình hóa thống kê, qua đó giảm mức độ phân tán của chuyển vị trong các trường hợp khảo sát.

Khi chiều dài tương quan tăng, các vùng vật liệu biến thiên đồng bộ hơn, khiến hiệu ứng trung bình hóa suy giảm và COV của chuyển vị tăng. Tại $d = 100$L, COV của cả ba mô hình đều xấp xỉ 0,04994–0,04995; mức giảm của mô hình trường ngẫu nhiên 2D và 3D so với trường ngẫu nhiên một chiều chỉ còn 0,017% và 0,025%. Khi đó, trường mô đun đàn hồi gần như đồng nhất trong từng hiện thực và ứng xử như một biến ngẫu nhiên toàn cục; trong xấp xỉ nhiễu bậc nhất, COV của chuyển vị tiến gần $COV_E = 0{,}05$.



a, Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trường ngẫu nhiên đến COV

b, Ảnh hưởng số chiều ngẫu nhiên đến COV của chuyển vị

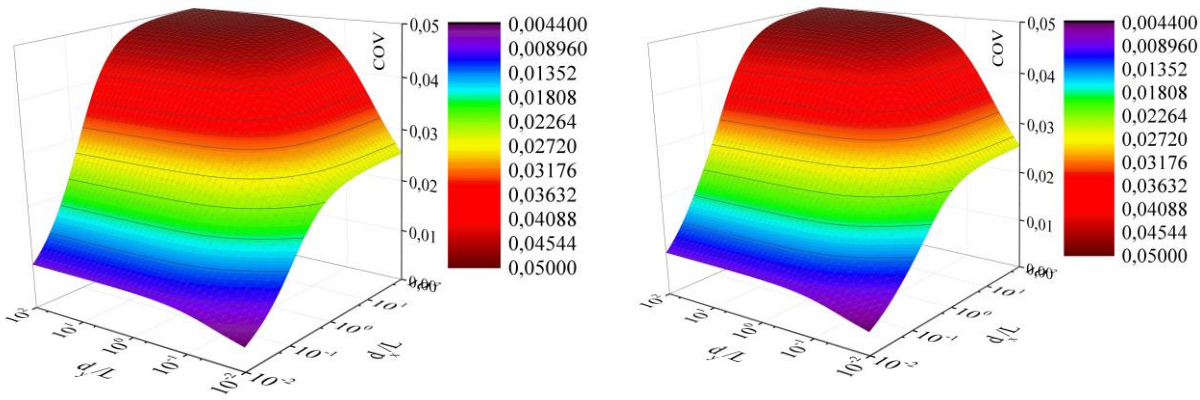
Hình 4.6. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

4.2. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

4.2.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến hệ số biến thiên giá trị riêng

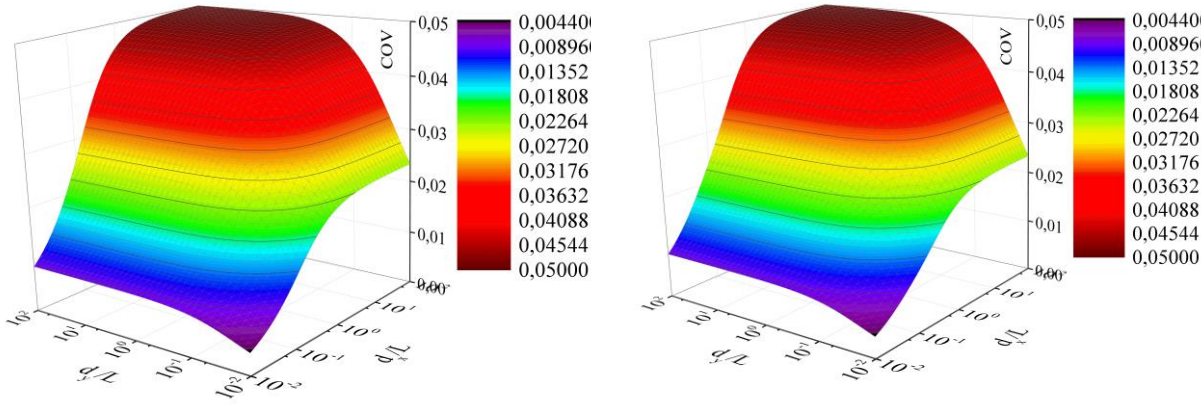
4.2.1.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

Chiều dài tương quan trong không gian hai chiều được thay đổi từ 0,01L đến 100L để khảo sát ảnh hưởng đến COV của giá trị riêng. Độ lệch chuẩn $\sigma_f = \sigma_g = 0{,}05$ với các trường hợp ngẫu nhiên: dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều, dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều, dầm có E và ρ ngẫu nhiên hai chiều với ba trường hợp: $\gamma = -0{,}5$; $\gamma = 0$; $\gamma = 0{,}5$. Kết quả nghiên cứu COV được thể hiện trong các hình từ Hình 4.7 đến Hình 4.11, cho thấy COV của trị riêng có xu hướng tăng khi chiều dài tương quan không gian tăng. Ở vùng có chiều dài tương quan nhỏ, COV tăng mạnh và gần như tuyến tính theo chiều dài tương quan. Tuy nhiên, khi chiều dài tương quan trở nên rất lớn (tiến tới vô cùng), COV tiếp tục tăng nhưng với tốc độ chậm dần, cho thấy đáp ứng ngẫu nhiên của dầm dần hội tụ về trạng thái tương ứng với một biến ngẫu nhiên.



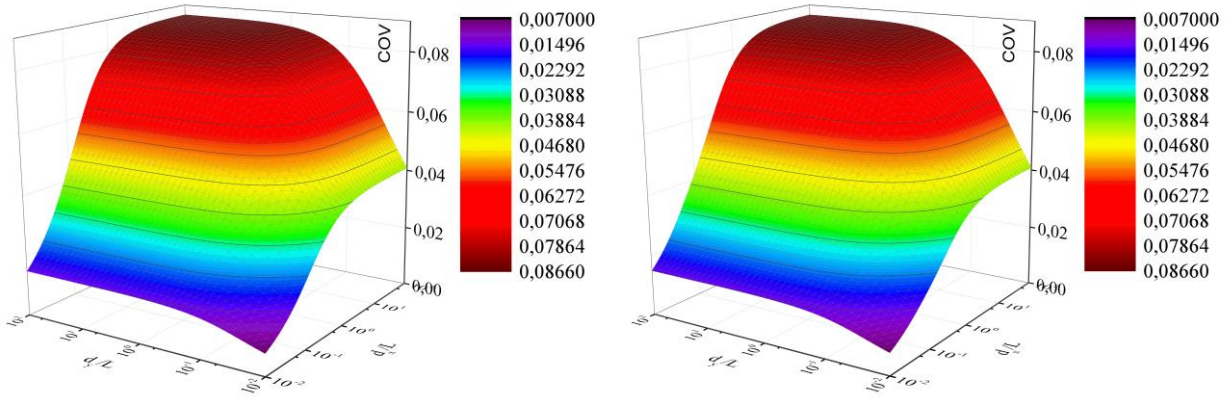
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều



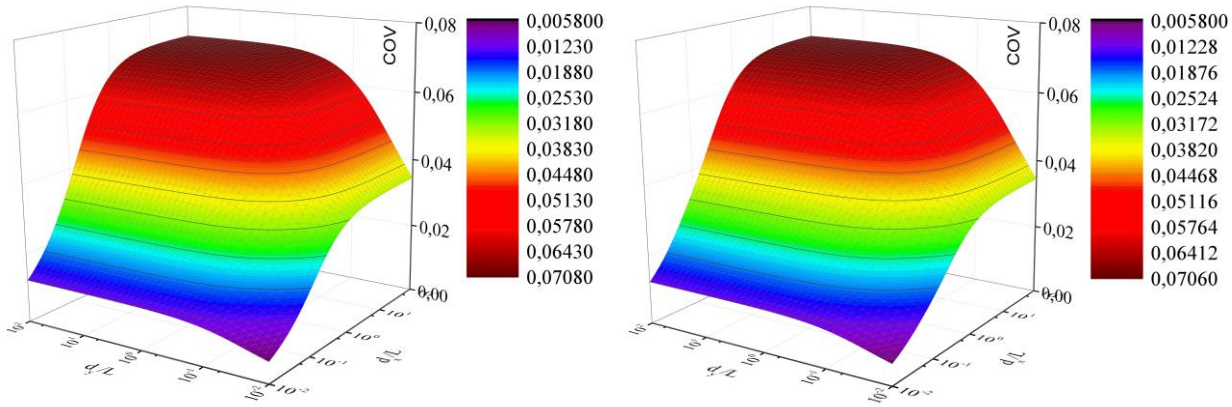
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều



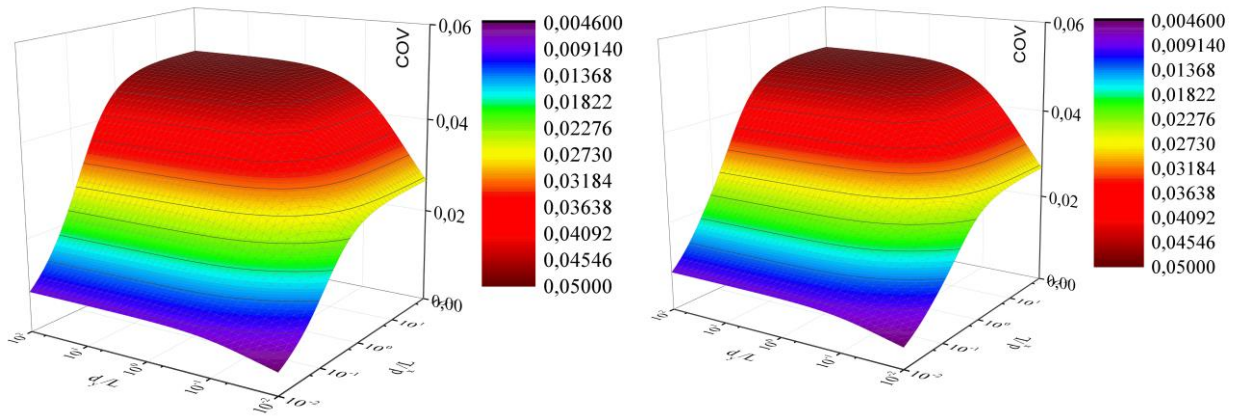
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều (γ = -0,5)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều (γ = 0)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều (γ = 0,5)

4.2.1.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Để phân tích sâu hơn ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều, nghiên cứu tiếp tục xem xét các trường hợp chiều dài tương quan theo các trục khác nhau, bao gồm: $d_x = d_y$, $d_y = d_z$, $d_x = d_z$. Đồng thời kết cấu dầm với tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều bao gồm: Dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều, dầm có E và ρ ngẫu nhiên ba chiều. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan không gian theo các trục đến COV được thể hiện trong các Hình A.1 đến Hình A.15 trong phụ lục A. Phân tích kết quả cho thấy khi chiều dài tương quan nhỏ, các giá trị riêng biến thiên rất ít xung quanh giá trị kỳ vọng. Ngược lại, khi chiều dài tương quan tăng, trường ngẫu nhiên trở nên đồng nhất hơn, làm giảm hiệu ứng trung bình hóa thống kê, dẫn đến biến thiên của giá trị riêng lớn hơn, tức là COV tăng theo chiều dài tương quan. Các bề mặt khảo sát trong Hình A.1–A.15 thể hiện sự phụ thuộc rõ rệt của COV các trị riêng vào chiều dài tương quan dọc trục dầm. Mức độ ảnh hưởng theo từng phương được xem xét trong điều kiện hình học, miền chiều dài tương quan và các quan hệ ràng buộc giữa những tham số đang khảo sát. Do chiều dài dầm và các kích thước mặt cắt khác nhau, việc sử dụng chung chiều dài L để chuẩn hóa không tạo ra các miền tương quan tương đối tương đương theo từng phương. Vì vậy, kết quả trên phản ánh đặc điểm của các cấu hình được xét, chưa xác lập một thứ tự ảnh hưởng tổng quát giữa các phương không gian.

4.2.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng

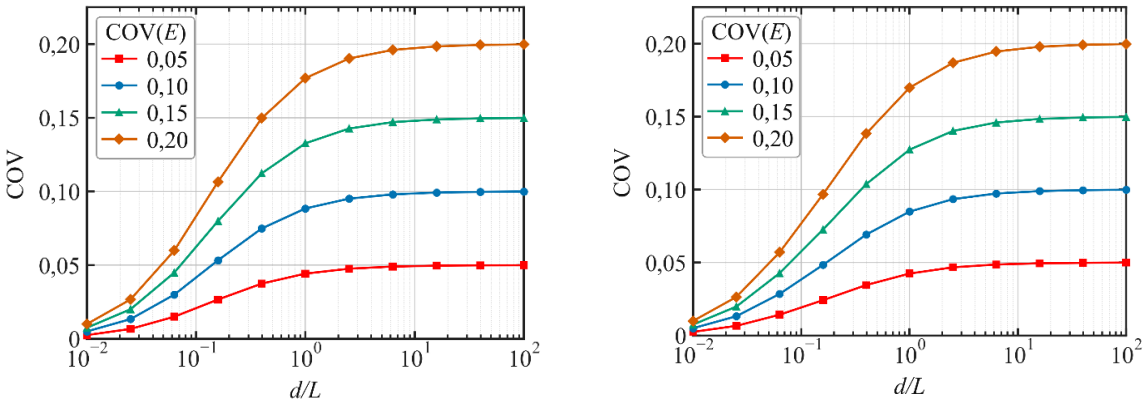
4.2.2.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

Hình C.1 đến Hình C.7 trong phụ lục C trình bày ảnh hưởng của độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên cũng chính là hệ số biến thiên của tính chất vật liệu đến COV giá trị riêng. Các kết quả phân tích chỉ ra rằng tồn tại một mối tương quan dương giữa độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên và COV. COV có xu hướng tăng cùng với sự gia tăng của độ lệch chuẩn của các yếu tố ngẫu nhiên. Trong trường hợp dầm chỉ có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều của E hoặc ρ, COV tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên đầu vào khi chiều dài tương quan tiến đến vô cùng. Hơn nữa, giả sử một mối tương quan âm hoàn hảo giữa các trường ngẫu nhiên của E và ρ, COV tiệm cận đến tổng của độ lệch chuẩn của chúng ở chiều dài tương quan lớn. Ảnh hưởng đáng kể của các thành phần ngẫu nhiên của ma trận [K] và ma trận [M] so với các thành phần tất định của [K] và [M] được thể hiện rõ ràng trong sự biến thiên đáng kể của COV đối với một mối tương quan hoàn toàn âm (γ = -1,0). Ngược lại, tương quan dương hoàn toàn (γ = +1) tạo hiệu ứng bù trừ giữa ảnh hưởng của biến thiên mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng, làm giảm COV trị riêng trong các trường hợp khảo sát. Khi các chiều dài tương quan cùng tiến tới vô cùng và hai trường có cùng COV, COV trị riêng tiến tới không.

4.2.2.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

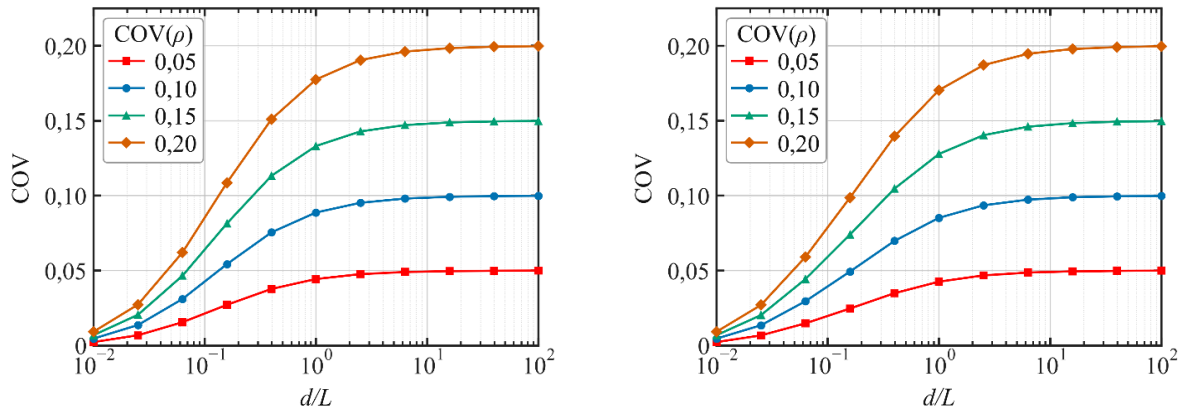
Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều và chiều dài tương quan đến COV của giá trị riêng được khảo sát. Trường ngẫu nhiên của E và ρ được giả định tương ứng với các giá trị thay đổi: 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Đồng thời chiều dài tương quan theo các trục trong không gian $d_x = d_y = d_z = d$. Kết quả phân tích được thể hiện trong các Hình 4.12 đến Hình 4.18. Khi giữ cố định các tham số tương quan, COV trị riêng tăng theo biên độ biến thiên chung của các trường vật liệu trong các trường hợp khảo sát. Xu hướng biến thiên theo chiều dài tương quan còn phụ thuộc vào hệ số tương quan chéo. Riêng trường hợp (γ = +1) và ($\sigma_f = \sigma_g$), Hình 4.18 cho thấy COV tăng trong miền chiều dài tương quan nhỏ rồi giảm khi chiều dài tương quan tiếp tục tăng. Khi chiều dài tương quan đạt giá trị rất lớn thì COV có xu hướng tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên trong trường hợp dầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên ba chiều. Trong trường hợp dầm có E và ρ ngẫu nhiên ba chiều có mối tương quan âm tuyệt đối thì khi chiều dài tương quan theo các trục trong không gian có xu hướng vô cùng thì COV của giá trị riêng có xu hướng tiệm cận đến tổng độ lệch chuẩn các trường ngẫu nhiên. Trong khi các trường ngẫu nhiên

là độc lập thống kê thì giá trị mà COV tiệm cận gần đến 70% tổng độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên.



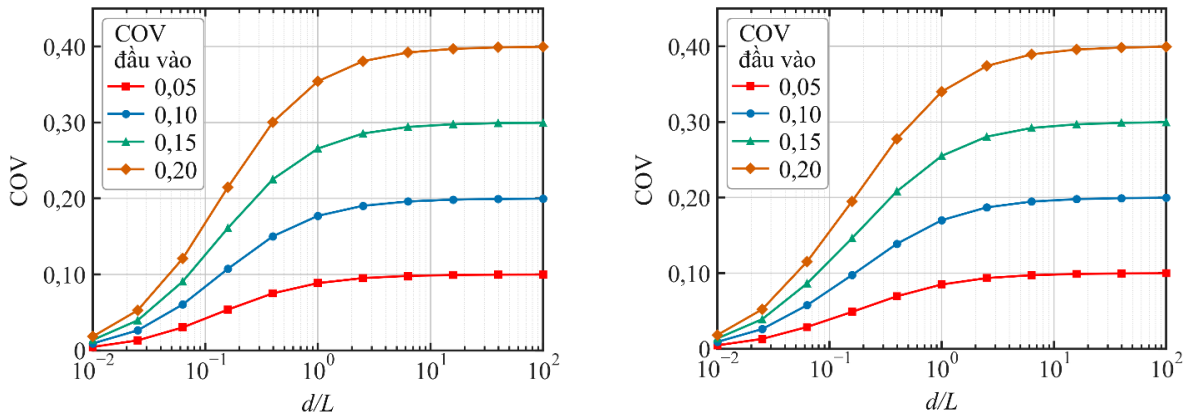
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.12. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên)



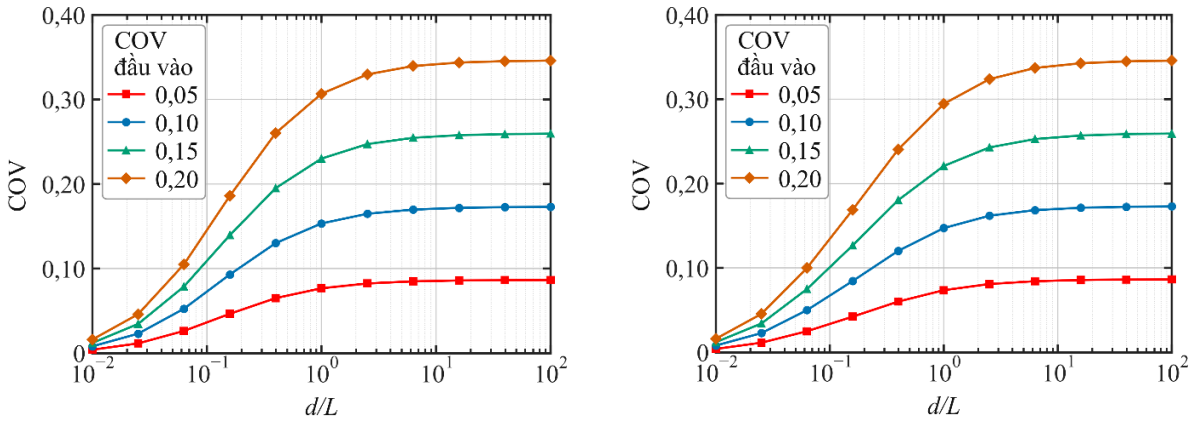
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.13. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên)



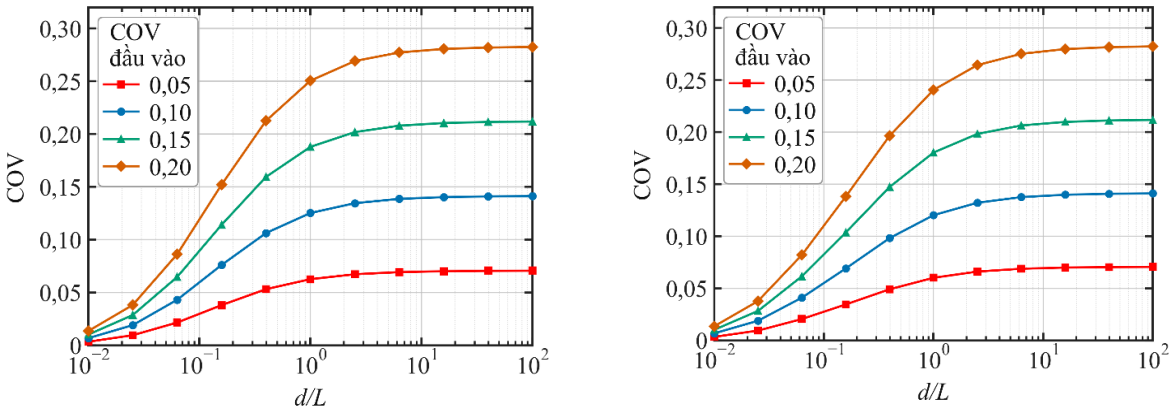
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.14. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -1,0)



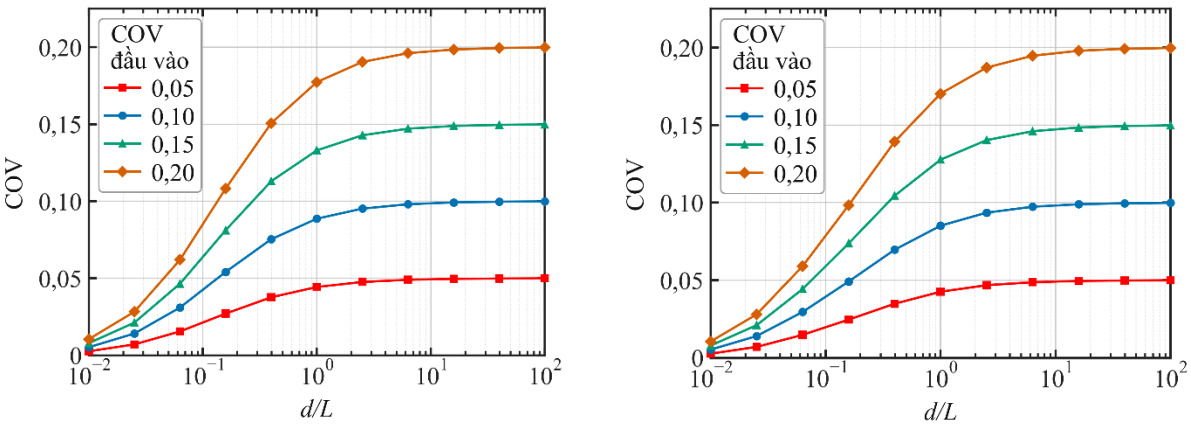
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.15. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -0,5)



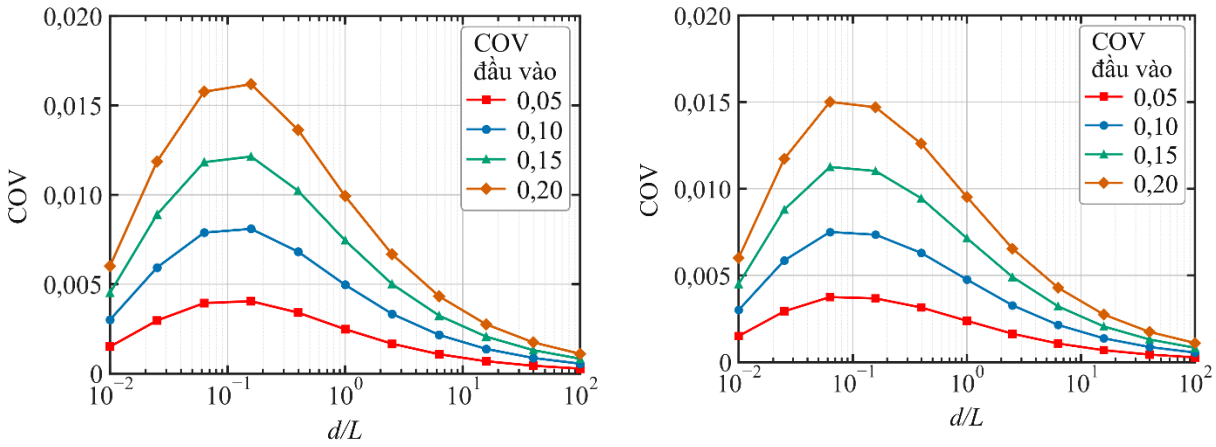
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.16. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.17. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0,5)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.18. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 1,0)

4.2.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của giá trị riêng và hệ số biến thiên của tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

4.2.3.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

Quan hệ giữa COV của giá trị riêng và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều cũng chính là COV của tính chất vật liệu được thể hiện trong các Hình B.1 đến Hình B.3 trong phụ lục B. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều được khảo sát tương ứng với các giá trị: 0; 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Chiều dài tương quan theo các trục được xem xét tương ứng với bốn trường hợp: $d_x = d_y = 0{,}03L$; $d_x = d_y = 0{,}2L$; $d_x = d_y = 1L$; $d_x = d_y = 15L$. Khi chỉ mô đun đàn hồi hoặc mật độ khối lượng là ngẫu nhiên, COV trị riêng xác định bằng SFEM bậc nhất tỷ lệ thuận với COV của tính chất vật liệu tương ứng. Khi cả hai trường cùng biến thiên với ($\sigma_f = \sigma_g = \sigma$), COV trị riêng cũng tỷ lệ thuận với (σ), với điều kiện chiều dài tương quan, hệ số tương quan chéo và các tham số tất định được giữ cố định.

4.2.3.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

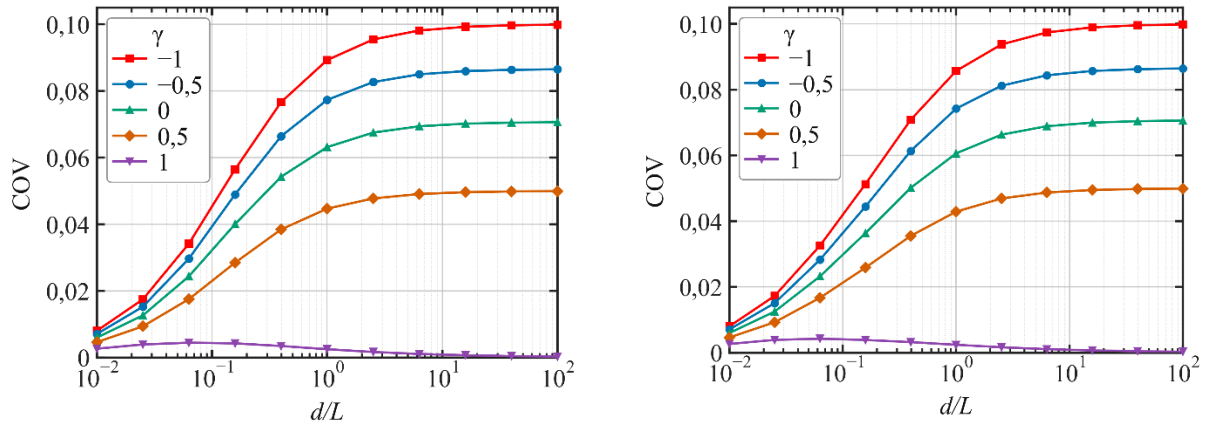
Quan hệ giữa COV của giá trị riêng và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều được khảo sát trong các trường hợp của chiều dài tương quan bao gồm: $d_x = d_y = d_z = 0{,}03L$; $d_x = d_y = d_z = 0{,}2L$; $d_x = d_y = d_z = 1L$ và $d_x = d_y = d_z = 15L$. Đồng thời ba trường hợp ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu cũng được nghiên cứu trong phần này bao gồm: Dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều và dầm có đồng thời cả mô đun và mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều. Các trường biến động tương đối f và g được giả thiết là các trường ngẫu nhiên dừng, có kỳ

vọng bằng không. Độ lệch chuẩn của f và g lần lượt bằng COV của mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng. Kết quả phân tích được thể hiện trong các Hình B.4 đến Hình B.6 trong phụ lục B phù hợp với cấu trúc của SFEM bậc nhất. Khi chỉ mô đun đàn hồi hoặc mật độ khối lượng là ngẫu nhiên, COV trị riêng tỷ lệ thuận với COV đầu vào tương ứng. Khi cả hai trường cùng biến thiên với ($\sigma_f = \sigma_g = \sigma$), COV trị riêng tỷ lệ thuận với (σ) tại mỗi chiều dài tương quan và hệ số tương quan chéo cố định.

4.2.4. Phân tích ảnh hưởng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng

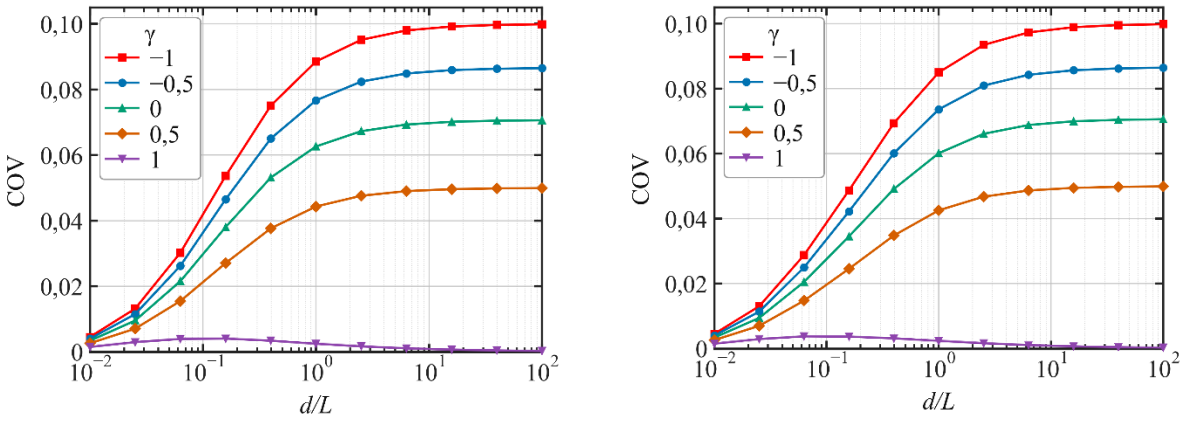
Trong mục này, ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên của E và ρ đến COV của giá trị riêng được phân tích chi tiết. Hệ số tương quan giữa hai trường ngẫu nhiên tương ứng với năm trường hợp: $\gamma = -1{,}0$; $\gamma = -0{,}5$; $\gamma = 0{,}0$; $\gamma = +0{,}5$; $\gamma = +1{,}0$. Trong các phân tích này, độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên được lấy bằng: 0,05, trong khi chiều dài tương quan không gian bằng d được thay đổi trong khoảng từ $0{,}01L$ đến $100L$. Kết quả phân tích được trình bày trong Hình 4.19 đối với trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và trong Hình 4.20 đối với trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.

Kết quả phân tích có thể cho thấy được COV của giá trị riêng có xu hướng giảm khi hệ số tương quan chéo giữa trường ngẫu nhiên E và ρ tăng. Trong các trường hợp khảo sát với các tham số còn lại giữ cố định, COV trị riêng đạt giá trị lớn nhất tại (γ = -1) và nhỏ nhất tại (γ = +1). Khi chiều dài tương quan trong không gian có xu hướng tiến đến vô cùng, COV của giá trị riêng tiệm cận đến hai lần độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên trong trường hợp tương quan âm tuyệt đối.



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.19. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0{,}05$)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.20. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng (σ_f = σ_g = 0,05)

Về mặt cơ học, hiện tượng này có thể được lý giải thông qua sự tương tác giữa ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của dầm. Cả hai ma trận này đều gồm thành phần có tính tất định và thành phần mang tính ngẫu nhiên. Khi các phần ngẫu nhiên của hai ma trận có mối tương quan âm hoàn hảo, sự biến thiên trong độ cứng và khối lượng diễn ra theo chiều ngược nhau, dẫn đến biến động cực đại của giá trị riêng. Với (γ = +1), biến thiên tương đối đồng chiều của mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng tạo hiệu ứng bù trừ trong biến thiên trị riêng. Tuy nhiên, hai trường vật liệu tham gia ma trận độ cứng và ma trận khối lượng thông qua các trọng số không gian khác nhau. Vì vậy, tương quan dương hoàn toàn giữa hai trường không tự động dẫn đến triệt tiêu hoàn toàn biến thiên trị riêng. Mức bù trừ phụ thuộc vào biên độ biến thiên, cấu trúc tương quan không gian và độ nhạy của mode đang xét.

Kết quả khảo sát và phân tích chỉ ra rằng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên vật liệu là một yếu tố được xác định có ảnh hưởng rõ rệt đến ứng xử động ngẫu nhiên của dầm. Việc giả định bỏ qua hoặc xác định không chính xác hệ số tương quan giữa các trường E và ρ có thể dẫn đến đánh giá sai lệch về độ bất định của các giá trị riêng. Do đó, trong các phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, việc xét đến đầy đủ mối tương quan của các trường vật liệu là cần thiết để đảm bảo tính chính xác và độ tin cậy của mô hình.

4.2.5. So sánh phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

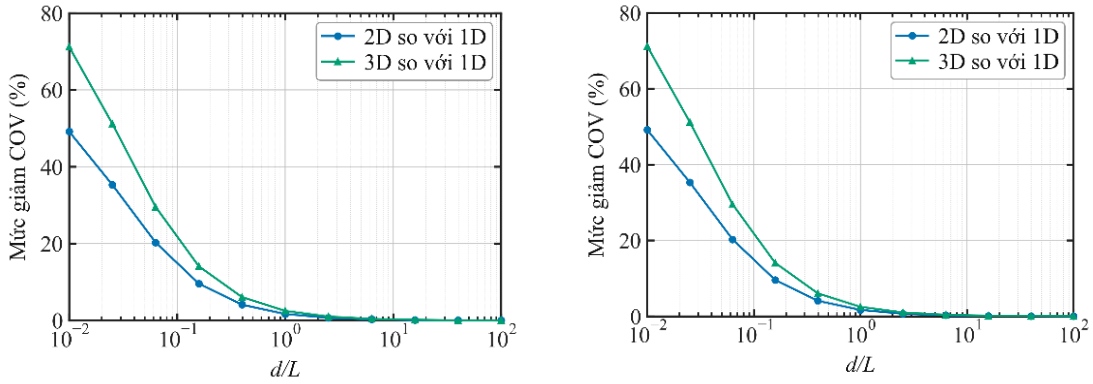
Ảnh hưởng của số chiều trường ngẫu nhiên đến COV của hai giá trị riêng được đánh giá bằng cách so sánh các mô hình ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều với mô hình ngẫu nhiên một chiều. Ba trường hợp được xét gồm: chỉ mô đun đàn hồi E ngẫu nhiên; chỉ mật

độ khối lượng ngẫu nhiên; và cả hai đại lượng cùng ngẫu nhiên. COV của mỗi trường đầu vào được giữ bằng 0,05; các chiều dài tương quan theo các phương được lấy bằng nhau và thay đổi từ 0,01L đến 100L. Hình 4.21 đến Hình 4.23 trình bày mức giảm tương đối của COV so với mô hình một chiều.

Trong cả ba trường hợp, COV giảm khi số chiều trường ngẫu nhiên tăng, đặc biệt ở chiều dài tương quan nhỏ. Tại d = 0,01L, đối với giá trị riêng thứ nhất, mô hình hai chiều và ba chiều lần lượt cho COV thấp hơn mô hình một chiều 49,17% và 71,22% khi chỉ E ngẫu nhiên; 53,23% và 73,52% khi chỉ ρ ngẫu nhiên; và 51,16% và 72,35% khi cả hai trường cùng ngẫu nhiên, không tương quan. Các mức giảm tương đối gần như trùng nhau đối với giá trị riêng thứ hai trong cấu hình khảo sát này.

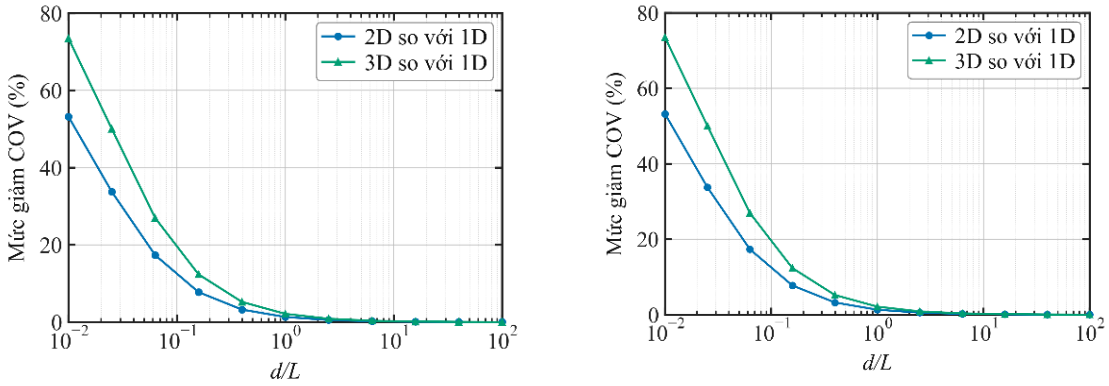
Về cơ học, biến thiên của giá trị riêng phụ thuộc vào biến thiên độ cứng và khối lượng theo từng dạng dao động. Khi xét thêm sự biến đổi vật liệu trên tiết diện, các vùng có tương quan yếu cùng đóng góp vào các tích phân độ cứng và khối lượng, làm tăng hiệu ứng trung bình hóa không gian. Vì vậy, khi chiều dài tương quan nhỏ so với các kích thước tiết diện, mô hình ba chiều cho COV nhỏ hơn mô hình hai chiều và một chiều. Mức giảm giữa trường hợp E ngẫu nhiên và mật độ ngẫu nhiên khác nhau do các trọng số cơ học trong tích phân độ cứng uốn và khối lượng khác nhau. Khi cả hai trường không tương quan, các đóng góp phương sai cộng lại trong xấp xỉ nhiễu bậc nhất, khiến COV lớn hơn từng trường hợp riêng lẻ.

Khi chiều dài tương quan tăng, sự biến đổi vật liệu trở nên đồng bộ hơn trong không gian, hiệu ứng trung bình hóa suy giảm và kết quả của ba mô hình tiến gần nhau. Tại d = 100L, mức giảm COV so với mô hình một chiều đều nhỏ hơn 0,026% trong ba trường hợp khảo sát. Khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, mỗi trường vật liệu tiệm cận một biến ngẫu nhiên đồng nhất trong không gian. Trong xấp xỉ nhiễu bậc nhất, COV của giá trị riêng khi đó tiến tới 0,05 đối với từng trường ngẫu nhiên riêng lẻ và khoảng 0,0707 khi cả E và ρ cùng ngẫu nhiên, không tương quan. Kết quả này phù hợp với sự phụ thuộc của giá trị riêng vào tỷ số giữa độ cứng và khối lượng.



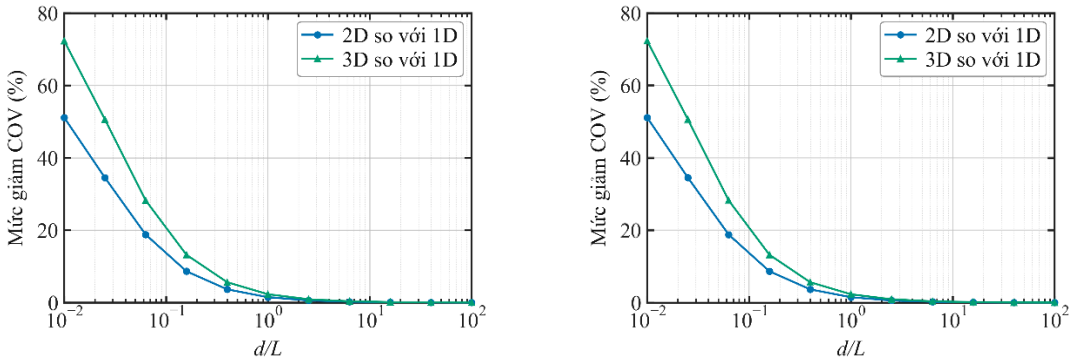
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.21. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có E ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.22. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có ρ ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

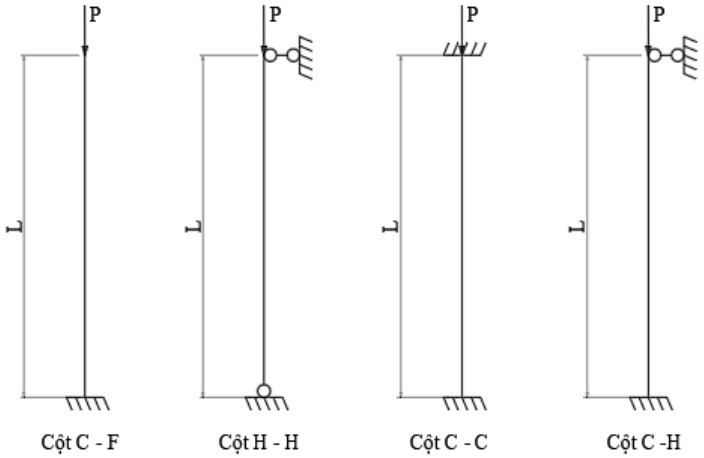


a. λ_1 *b.* λ_2

Hình 4.23. So sánh COV của trị riêng trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = 0$)

4.3. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

Xét cột chịu nén đúng tâm có chiều dài L = 8 m, mặt cắt ngang $b = h$ = 0,25 m, bốn điều kiện liên kết: ngàm–ngàm, ngàm–khớp, khớp–khớp và ngàm–tự do. Mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều) dưới dạng trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng với giá trị kỳ vọng $E_0 = 30\times10^9\ N/m^2$. Độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên không gian σ_f = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20 chiều dài tương quan không gian thay đổi từ 0,01L đến 100L.

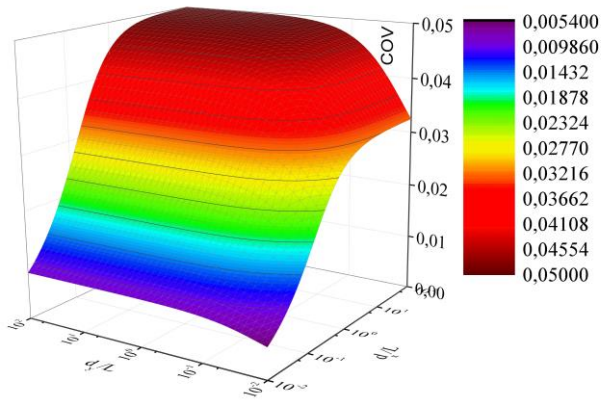


Hình 4.24. Sơ đồ tính cột chịu nén đúng tâm

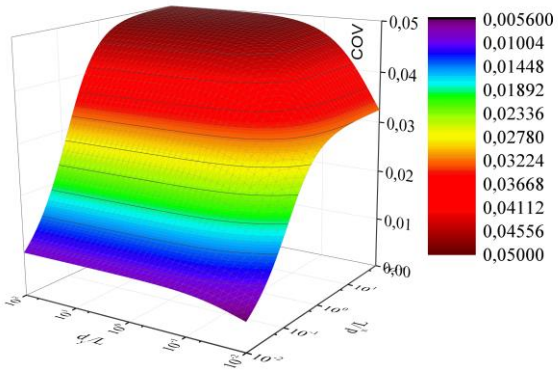
4.3.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan của trường ngẫu nhiên đến hệ số biến thiên lực tới hạn

Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn được khảo sát cho thay đổi từ 0,01L đến 100L và σ_f = 0,05. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan hai chiều đến COV của lực tới hạn được thể hiện trong Hình 4.25 tương ứng với các dạng liên kết ở hai đầu cột khác nhau. Kết quả phân tích cho thấy COV của lực tới hạn tăng theo chiều dài tương quan và dần tiệm cận một giới hạn. Cụ thể, khi chiều dài tương quan nhỏ, mô đun đàn hồi biến động trong những khoảng không gian hẹp. Điều này kích hoạt mạnh mẽ hiệu ứng trung bình hóa không gian trên toàn bộ cấu kiện, làm triệt tiêu các biến động cục bộ và dẫn đến lực tới hạn ít bị phân tán, tập trung sát với giá trị kỳ vọng. Ngược lại, khi chiều dài tương quan lớn, sự biến thiên không gian của mô đun đàn hồi diễn ra rất chậm, khiến hiệu ứng trung bình hóa suy yếu. Lúc này, đáp ứng của toàn hệ thống dao động mạnh xung quanh giá trị kỳ vọng. Đặc biệt, khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, trường ngẫu nhiên thoái hóa thành một biến ngẫu nhiên duy nhất; kéo theo đó, mức độ biến thiên của COV sẽ tiệm cận với mức độ biến thiên đầu vào của mô đun đàn hồi. Đối với cột có tỷ số

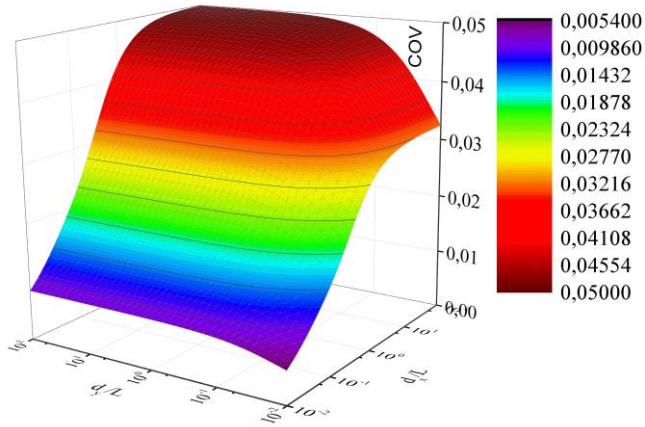
L/h = 32, trong miền khảo sát chung từ 0,01 đến 100 của các tỷ số d_x/L và d_y/L, cho thấy COV của lực tới hạn thay đổi rõ hơn theo chiều dài tương quan dọc trục so với chiều dài tương quan theo chiều cao mặt cắt.



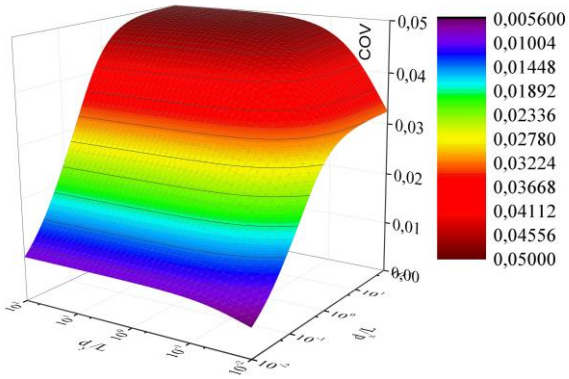
a, Cột C - F



b, Cột H - H



c, Cột C - C

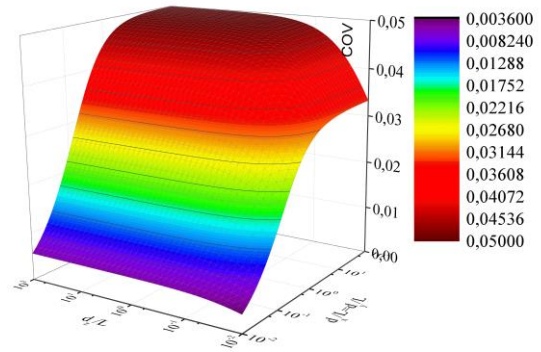


d, Cột C - H

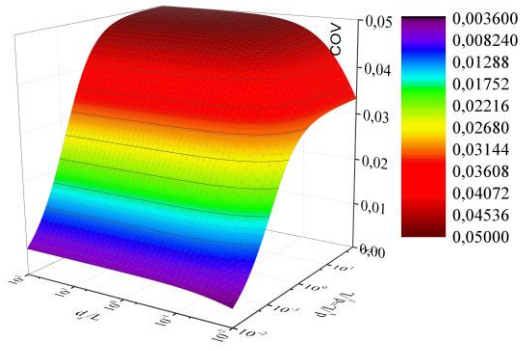
Hình 4.25. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo các trục trong không gian của trường ngẫu nhiên ba chiều E đến COV của lực tới hạn được thể hiện trong các Hình 4.26 đến Hình 4.28. Có ba trường hợp của chiều dài tương quan được khảo sát bao gồm: $d_y = d_z = d_1$ và $d_x = d_2$, $d_x = d_z = d_1$ và $d_y = d_2$; $d_x = d_y = d_1$ và $d_z = d_2$ với d_1, d_2 thay đổi từ 0,01L đến 100L. Khi chiều dài tương quan không gian nhỏ thì COV nhận giá trị nhỏ và khi chiều dài tương quan theo các trục tăng thì COV tăng. Ở những giá trị của chiều dài tương quan lớn COV tiếp tục có xu hướng tăng khi chiều dài tương quan theo các trục trong không gian tiếp tục tăng nhưng mức độ tăng của COV không đáng kể. Khi chiều dài tương quan theo

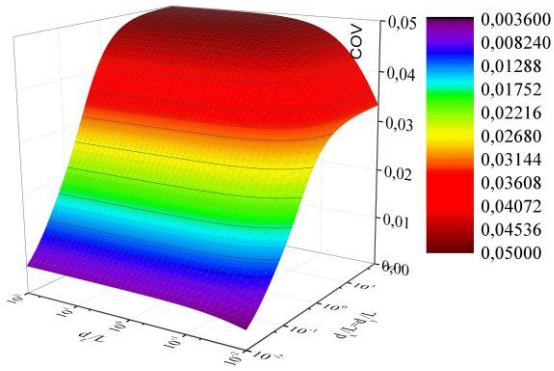
các trục trong không gian có xu hướng vô cùng thì COV có xu hướng tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều.



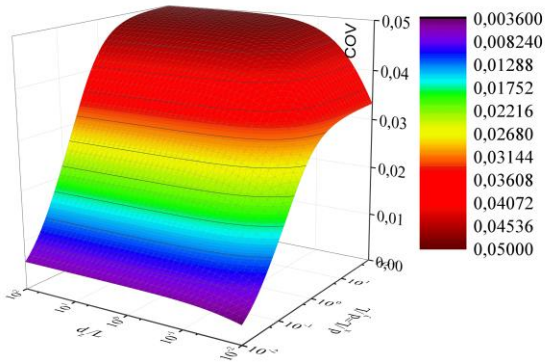
a, Cột C - F



b, Cột H - H

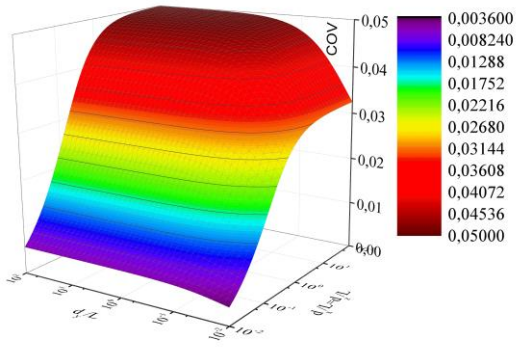


c, Cột C - C

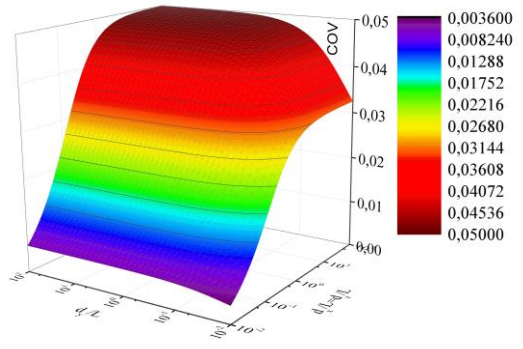


d, Cột C - H

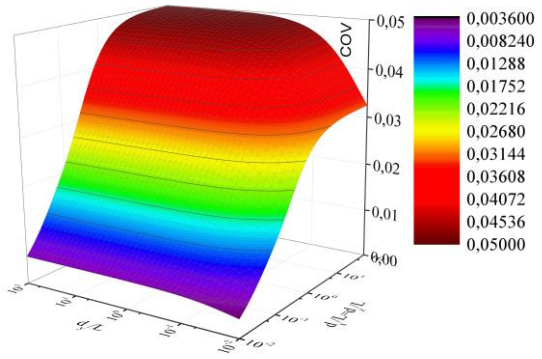
Hình 4.26. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)



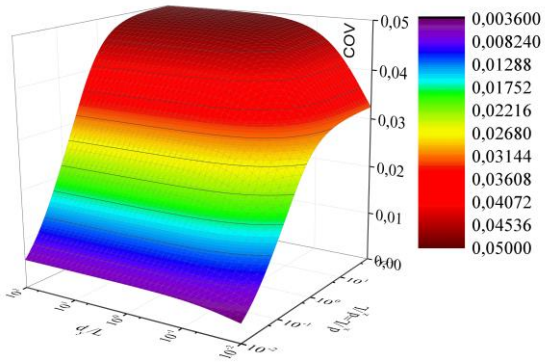
a, Cột C - F



b, Cột H - H

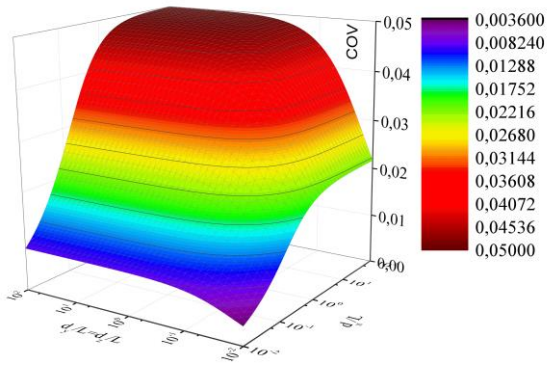


c, Cột C - C

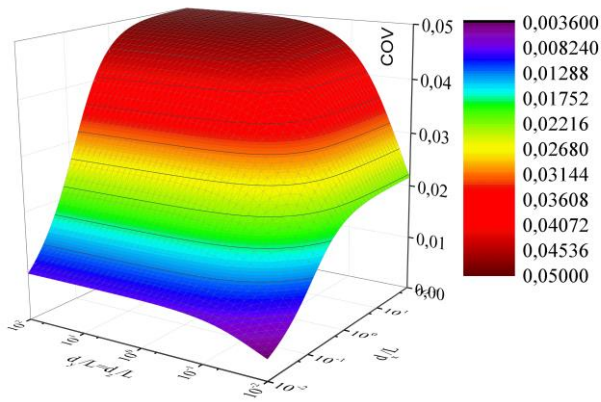


d, Cột C - H

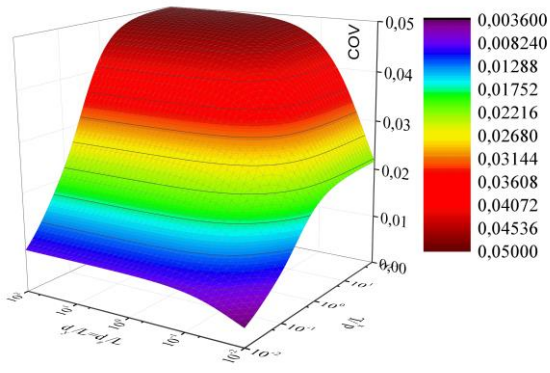
Hình 4.27. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)



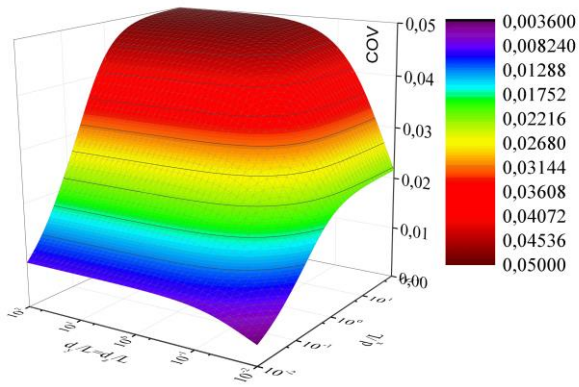
a, Cột C - F



b, Cột H - H



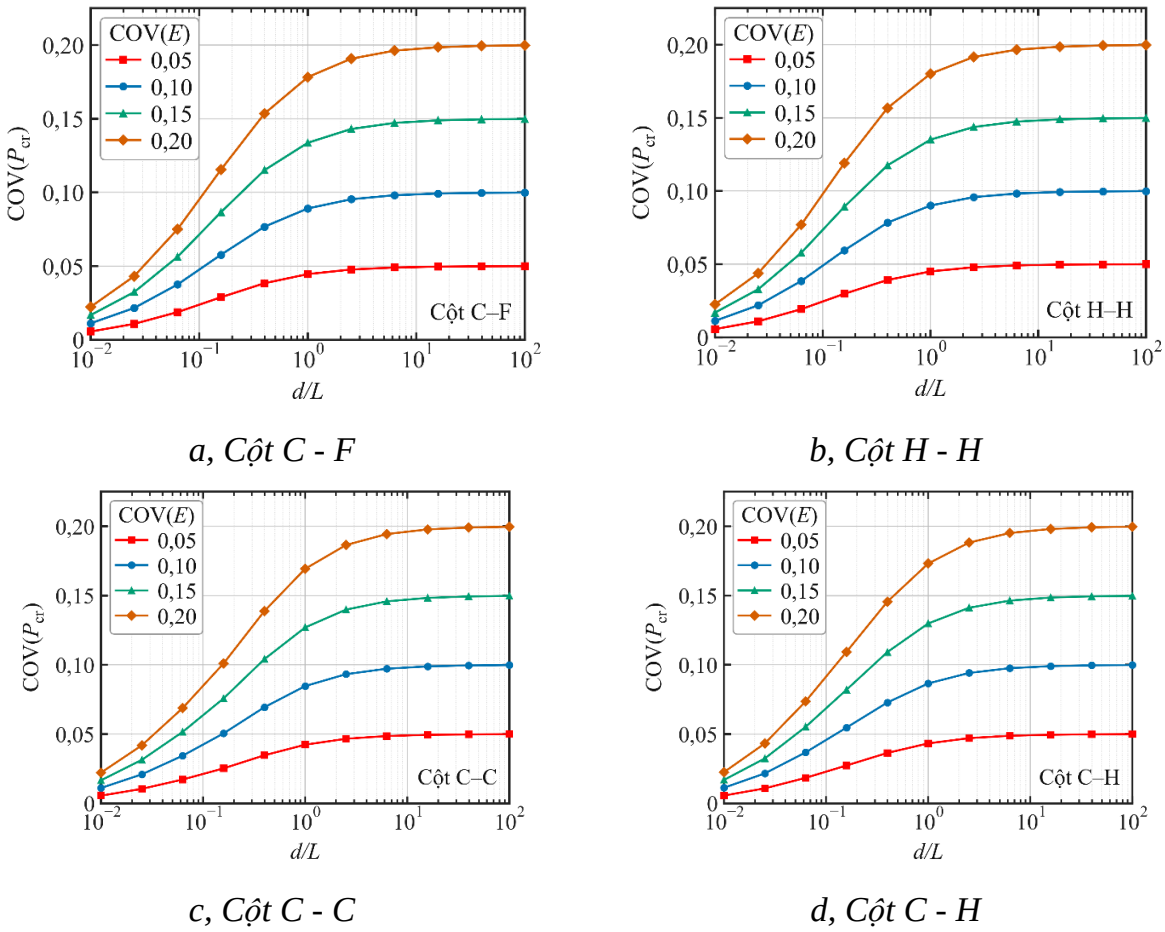
c, Cột C - C



d, Cột C - H

Hình 4.28. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)

4.3.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên lực tới hạn

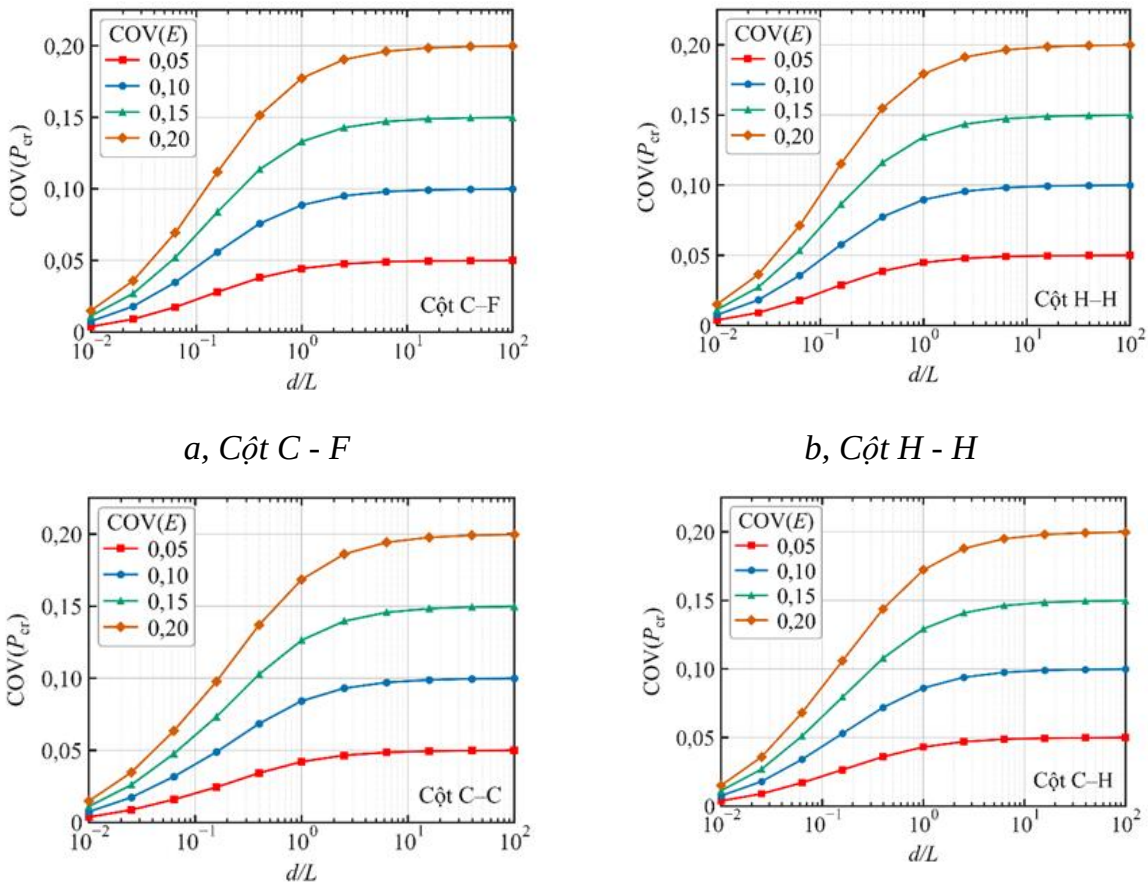


a, Cột C - F *b, Cột H - H*

c, Cột C - C *d, Cột C - H*

Hình 4.29. Ảnh hưởng của COV trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn

Để phân tích ảnh hưởng của độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian cũng chính là hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến COV của lực tới hạn ở những chiều dài tương quan khác nhau thì trong nghiên cứu này độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên được giả định tương ứng với các giá trị 0; 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Chiều dài tương quan theo hai trục bằng nhau và thay đổi từ 0,01L đến 100L. COV của lực tới hạn và độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên không gian có mối tương quan dương như Hình 4.29. Điều này có nghĩa là khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng, COV của lực tới hạn cũng có xu hướng tăng và ngược lại.



a, Cột C - F

b, Cột H - H

c, Cột C - C

d, Cột C - H

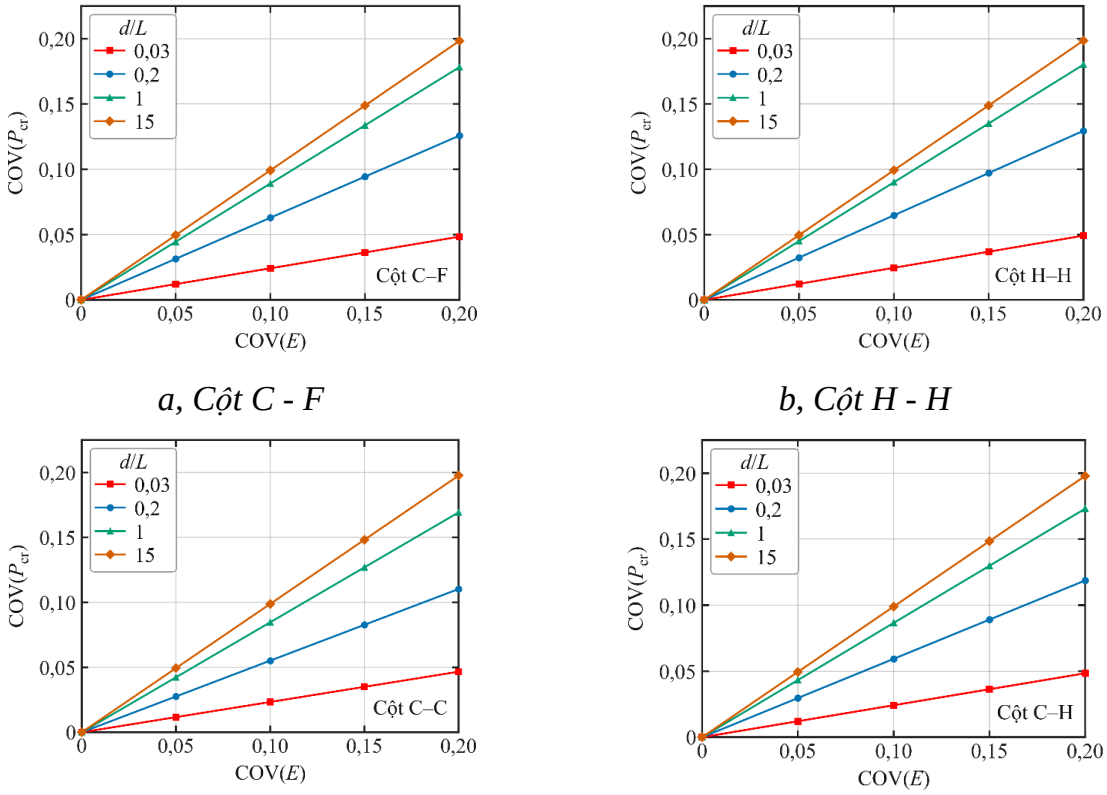
Hình 4.30. Ảnh hưởng của COV trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều đến COV của lực tới hạn

Hình 4.30 thể hiện ảnh hưởng của chiều dài tương quan và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV. COV có xu hướng tăng khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng hoặc chiều dài tương quan tăng. Khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng, nghĩa là mức độ biến động của mô đun đàn hồi quanh giá trị kỳ vọng càng lớn. Điều này làm tăng biến động của lực tới hạn xung quanh giá trị kỳ vọng và dẫn đến COV tăng lên. Ở những giá trị nhỏ của chiều dài tương quan COV có xu hướng tăng mạnh khi chiều dài tương quan tăng. Ngược lại, ở những giá trị lớn của chiều dài tương quan thì COV có xu hướng tăng nhưng với mức tăng giảm dần kể từ khi chiều dài tương quan tăng.

4.3.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên lực tới hạn và hệ số biến thiên mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian

Quan hệ giữa độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn cho các cột có liên kết ở hai đầu khác nhau cũng được phân tích trong nghiên cứu này. Có bốn trường hợp của chiều dài tương quan được khảo sát bao gồm $d_x = d_y = 0{,}03L$; $d_x =$

d_y = 0,2L; d_x = d_y = 1L; d_x = d_y = 15L. Kết quả phân tích được thể hiện trong Hình 4.31. Sự biến động của mô đun đàn hồi xung quanh giá trị kỳ vọng dẫn đến sự biến động của lực tới hạn xung quanh giá trị kỳ vọng của lực tới hạn. Với chiều dài tương quan, điều kiện liên kết, hình học và giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi giữ cố định, SFEM bậc nhất cho COV lực tới hạn tỷ lệ thuận với COV mô đun đàn hồi. Hệ số tỷ lệ phụ thuộc vào cấu hình khảo sát và thể hiện mức truyền bất định từ vật liệu đến lực tới hạn.



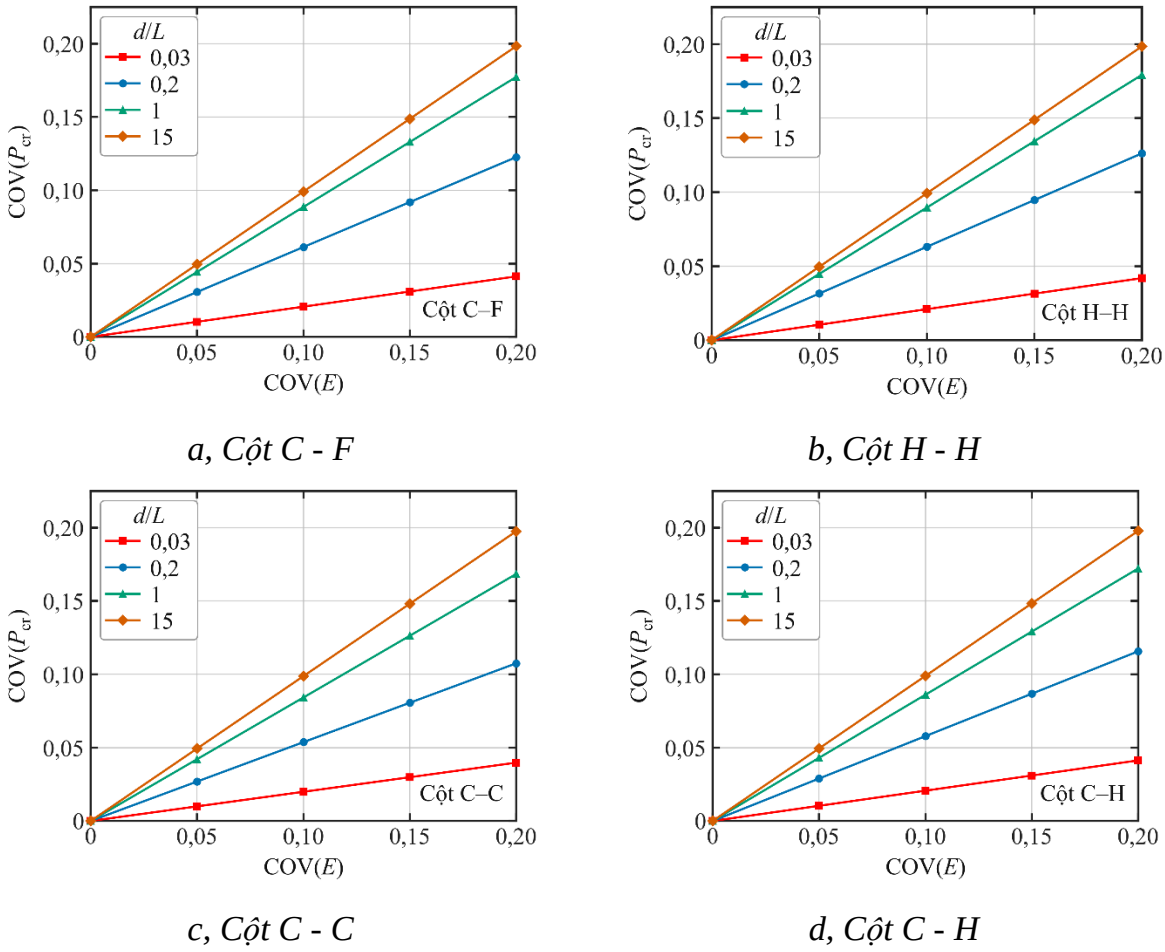
a, Cột C - F *b, Cột H - H*

c, Cột C - C *d, Cột C - H*

Hình 4.31. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi

Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều của cột được biểu diễn dưới dạng toán học như phương trình (3.21) với $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên ba chiều có giá trị kỳ vọng bằng không. Do đó COV của mô đun đàn hồi bằng với độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều. Như vậy quan hệ giữa COV của lực tới hạn và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều cũng chính là quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều. Để phân tích mối quan hệ này các trường hợp của chiều dài tương quan được phân tích bao gồm: d_x = d_y = d_z = 0,03L; d_x = d_y = d_z = 0,2L; d_x = d_y = d_z = 1L; d_x = d_y = d_z = 15L. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều được giả định nhận các giá trị bao gồm: 0; 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Đối với trường ngẫu nhiên ba chiều, COV lực tới hạn cũng tỷ lệ thuận với COV mô đun đàn hồi trong xấp xỉ bậc nhất, khi các tham

số còn lại được giữ cố định. Hình 4.32 thể hiện sự khác biệt về hệ số tỷ lệ ứng với các chiều dài tương quan và điều kiện liên kết được khảo sát.



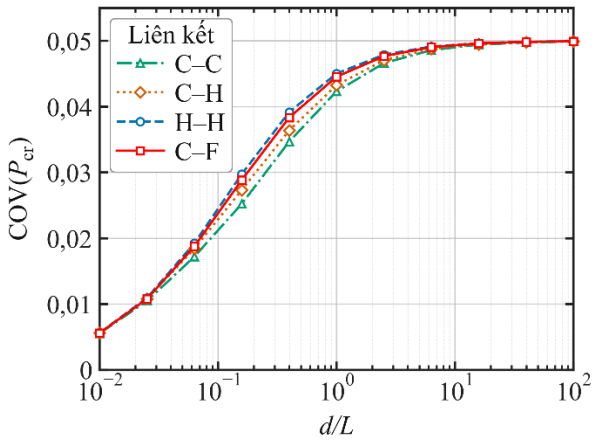
a, Cột C - F *b, Cột H - H*

c, Cột C - C *d, Cột C - H*

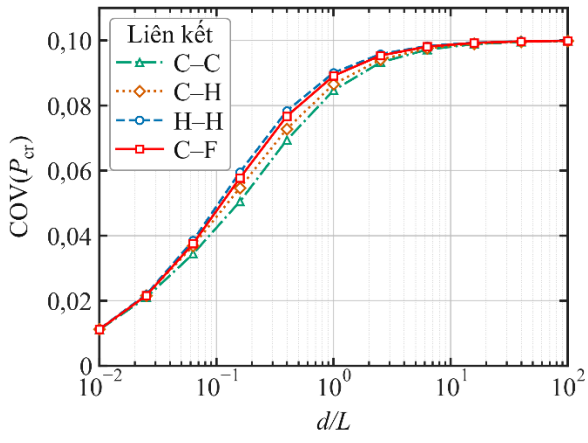
Hình 4.32. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi

4.3.4. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến hệ số biến thiên lực tới hạn

Liên kết của hai đầu cột có ảnh hưởng trực tiếp đến độ lớn của lực tới hạn và dạng mất ổn định của cột. Khi cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian thì lực tới hạn cũng là một biến ngẫu nhiên. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến COV là tương đối nhỏ khi so sánh với ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên tính chất vật liệu, đặc biệt ở những chiều dài tương quan nhỏ hoặc chiều dài tương quan lớn có xu hướng vô cùng như Hình 4.33 và Hình 4.34. Như vậy tính ngẫu nhiên không gian ba chiều của mô đun đàn hồi ảnh hưởng rõ rệt đến ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm.

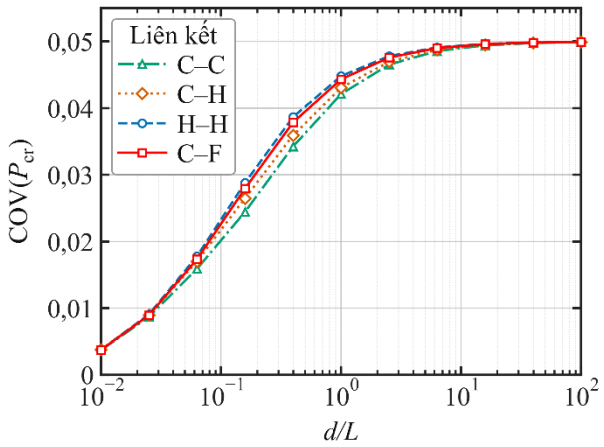


a, σ_f = 0,05

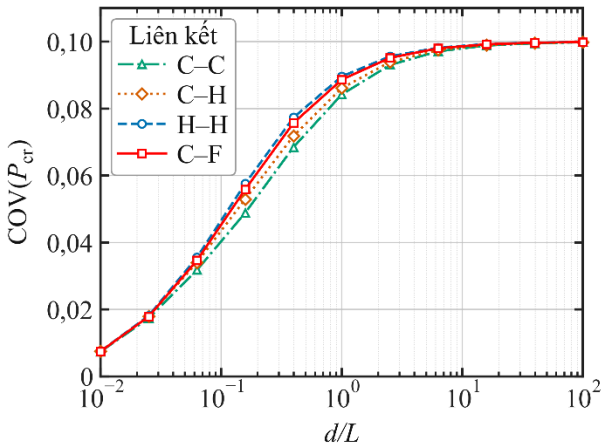


b, σ_f = 0,10

Hình 4.33. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều



a, σ_f = 0,05



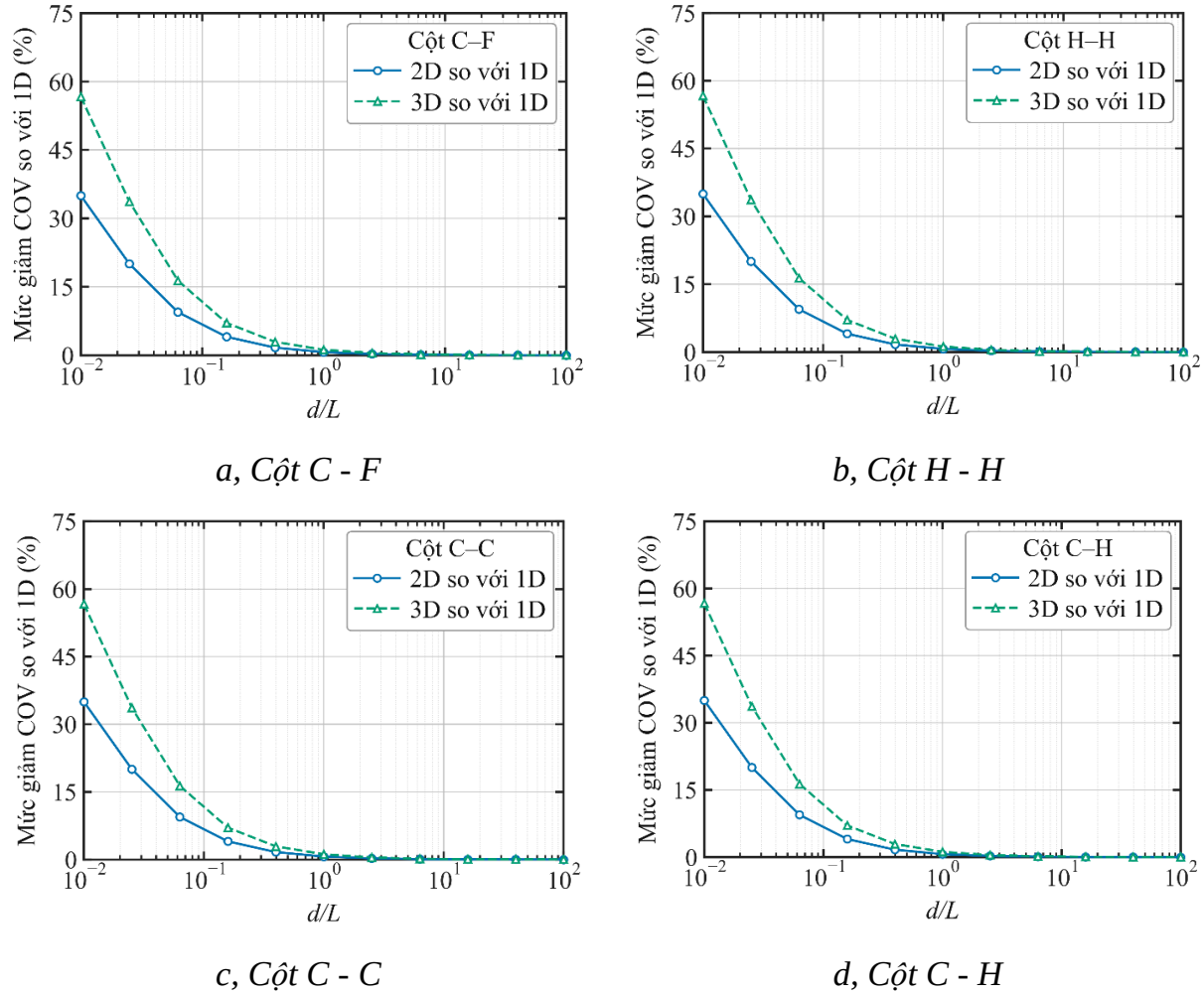
b, σ_f = 0,10

Hình 4.34. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

4.3.5. So sánh ổn định Euler của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Trong mô hình trường ngẫu nhiên hai chiều, mô đun đàn hồi biến thiên theo trục dọc *x* và chiều cao tiết diện *y*, đồng thời được giả thiết đồng nhất theo bề rộng *z*. Mô hình ngẫu nhiên ba chiều xét thêm biến thiên theo phương *z*, làm thay đổi mức độ trung bình hóa thống kê trong độ cứng chống uốn của tiết diện. Khi chiều dài tương quan theo phương *z* nhỏ so với bề rộng tiết diện, các vùng vật liệu có tương quan yếu cùng đóng góp vào độ cứng chống uốn, làm giảm sự phân tán của lực tới hạn. Vì vậy, sự khác biệt giữa hai mô hình phụ thuộc trực tiếp vào tỷ số giữa chiều dài tương quan theo phương *z* và bề rộng tiết diện. Kết quả trong Hình 4.35 cho thấy rõ ảnh hưởng này, COV của lực tới hạn đối với cột

H–H giảm từ 0,005626 trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều xuống 0,003750 trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều, tương ứng giảm khoảng 33,35%. Mức giảm tương đối này cũng được ghi nhận ở ba liên kết C–C, C–H và C–F trong phạm vi mô hình khảo sát.



a, Cột C - F *b, Cột H - H*

c, Cột C - C *d, Cột C - H*

Hình 4.35. So sánh COV của lực tới hạn, *E* ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Khi chiều dài tương quan tăng, biến động vật liệu theo bề rộng trở nên đồng bộ hơn, khiến hiệu ứng trung bình hóa bổ sung trong mô hình ngẫu nhiên ba chiều suy giảm. Mức chênh lệch COV giữa ngẫu nhiên 3D và 2D chỉ còn khoảng 0,52% tại d = L và 0,0052% tại d = 100L. Khi d lớn hơn nhiều so với các kích thước cột, trường mô đun đàn hồi tiến gần trạng thái đồng nhất ngẫu nhiên trong không gian; lực tới hạn biến thiên gần tỷ lệ với mô đun đàn hồi và COV của cả hai mô hình tiệm cận COV_E = 0,05.

4.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG IV

Sử dụng các mô hình SFEM đã thiết lập, Chương IV định lượng ảnh hưởng của đặc trưng trường vật liệu đến COV chuyển vị, trị riêng dao động uốn và lực tới hạn Euler.

- ✓ Khi giữ nguyên COV vật liệu tại một điểm, chiều dài tương quan nhỏ làm tăng hiệu ứng trung bình hóa không gian trong các tích phân độ cứng và khối lượng, qua đó giảm mức phân tán của đáp ứng tổng thể. Đối với chuyển vị tĩnh và lực tới hạn, COV tăng khi chiều dài tương quan tăng và dần tiến tới giới hạn của trường vật liệu đồng nhất trong từng hiện thực. Trong xấp xỉ bậc nhất, giới hạn COV của hai đại lượng này bằng COV mô đun đàn hồi. Đối với trị riêng dao động, xu hướng theo chiều dài tương quan còn phụ thuộc vào tương quan chéo giữa mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng.
- ✓ Số chiều của trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu ảnh hưởng rõ đến COV khi chiều dài tương quan theo các phương trên tiết diện nhỏ so với kích thước tương ứng. Với các điều kiện đầu vào được giữ tương đương trong phép đối sánh, xét thêm biến thiên trên tiết diện làm tăng trung bình hóa không gian; trường ngẫu nhiên ba chiều cho COV thấp hơn trường ngẫu nhiên hai chiều, và các kết quả tiến gần nhau khi tương quan trên tiết diện trở nên rất lớn. Chẳng hạn, ở bài toán tĩnh với COV mô đun đàn hồi bằng 0,05 và d = 0,01L, COV chuyển vị của các mô hình trường một chiều, hai chiều và ba chiều lần lượt bằng 0,00891; 0,00453 và 0,00256. Khi mọi chiều dài tương quan đều lớn so với kích thước cấu kiện, các mô hình tiến đến cùng giới hạn trường đồng nhất ngẫu nhiên trong không gian.
- ✓ Ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo từng phương phụ thuộc vào hình học cấu kiện, trọng số cơ học và miền tham số khảo sát. Trong các cấu hình đã xét, thay đổi chiều dài tương quan dọc trục thường gây biến đổi COV rõ hơn thay đổi tương quan trên tiết diện.
- ✓ Khi các tham số tất định và cấu trúc tương quan được giữ cố định, SFEM bậc nhất cho COV đáp ứng tỷ lệ thuận với biên độ biến thiên chung của vật liệu đầu vào. Với bài toán dao động có đồng thời hai trường ngẫu nhiên, quan hệ này áp dụng cho các khảo sát có COV của E và ρ cùng thay đổi với giá trị bằng nhau và hệ số tương quan chéo cố định. Quan hệ tỷ lệ là hệ quả của khai triển bậc nhất; hệ số tỷ lệ phụ thuộc vào số chiều trường vật liệu, chiều dài tương quan và đại lượng đáp ứng đang xét.
- ✓ Tương quan chéo giữa E và ρ có ảnh hưởng đáng kể đến COV trị riêng. Trong các trường hợp khảo sát với tham số còn lại cố định, COV giảm khi hệ số tương quan chéo tăng: tương quan âm làm tăng đóng góp tổng hợp của biến thiên độ cứng và khối lượng, còn tương quan dương tạo hiệu ứng bù trừ. Với tương quan dương hoàn toàn và COV hai trường bằng nhau, COV trị riêng có thể tăng ở miền chiều dài tương quan nhỏ rồi giảm khi tương quan tiếp tục tăng. Do các trọng số độ cứng và khối lượng khác nhau, sự bù trừ chưa hoàn toàn ở chiều dài tương quan hữu hạn;

COV trị riêng tiến về không trong giới hạn hai trường đồng nhất ngẫu nhiên trong không gian. Với tương quan âm hoàn toàn, giới hạn COV trị riêng trong xấp xỉ bậc nhất bằng tổng COV của hai trường.

- ✓ Điều kiện liên kết hai đầu cột quyết định lực tới hạn của bài toán tất định và dạng mất ổn định, đồng thời làm thay đổi độ nhạy của lực tới hạn đối với phân bố vật liệu. Vì vậy, ảnh hưởng của liên kết đến COV cần được xét cùng cấu trúc tương quan không gian. Trong miền tương quan hữu hạn, COV giữa các loại liên kết có thể khác nhau; khi mô đun đàn hồi tiến đến trạng thái đồng nhất ngẫu nhiên trong không gian, COV lực tới hạn của các loại liên kết cùng tiến đến COV mô đun đàn hồi.

Các kết quả trên định lượng vai trò của số chiều và cấu trúc tương quan trường vật liệu trong phạm vi mô hình thanh phẳng Euler–Bernoulli và xấp xỉ nhiễu bậc nhất.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

I. Những đóng góp mới của luận án

Luận án đã phát triển và kiểm chứng khung phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) để phân tích đáp ứng cơ học của dầm, cột có tính chất vật liệu biến thiên ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều trong không gian. Trong phạm vi nghiên cứu, các đóng góp mới của luận án được tổng kết như sau:

1. Phát triển khung phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên để phân tích dầm, cột có tính chất vật liệu biến thiên ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.

Luận án thiết lập các biểu thức tích phân trọng số để biểu diễn thành phần ngẫu nhiên của ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và xác định ma trận hiệp phương sai của các biến tích phân trọng số từ cấu trúc tương quan của trường vật liệu. Kết hợp với phương pháp nhiễu bậc nhất, khung SFEM cho phép xác định trực tiếp các giá trị xấp xỉ của kỳ vọng, phương sai và COV của chuyển vị tĩnh, trị riêng dao động uốn phẳng và tải mất ổn định uốn phẳng Euler. Các kết quả được kiểm chứng thông qua khảo sát hội tụ, giới hạn tất định, đối sánh với MCS và kết quả đã công bố.

2. Định lượng ảnh hưởng của số chiều và cấu trúc tương quan không gian của trường vật liệu đến độ phân tán đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột.

Luận án xác định ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo phương dọc trục và các phương trên tiết diện đến COV của chuyển vị, trị riêng dao động và tải trọng tới hạn. Các kết quả so sánh lượng hóa hiệu ứng trung bình hóa không gian, làm rõ sự khác biệt giữa trường vật liệu hai chiều và ba chiều trong miền chiều dài tương quan nhỏ, cũng như sự thu hẹp khác biệt khi các chiều dài tương quan đồng thời tăng lớn. Qua đó, luận án cung cấp cơ sở định lượng để đánh giá ảnh hưởng của việc giản lược số chiều của trường vật liệu đối với các cấu hình khảo sát.

3. Định lượng ảnh hưởng của tương quan chéo giữa mô đun đàn hồi và khối lượng riêng đến đặc trưng thống kê của trị riêng dao động uốn.

Luận án xác định đóng góp của biến thiên độ cứng, khối lượng và hiệp phương sai chéo giữa chúng vào phương sai của trị riêng. Kết quả khảo sát làm rõ xu hướng tăng độ phân tán khi tương quan âm và giảm độ phân tán khi tương quan dương, đồng thời xác định sự phụ thuộc của mức bù trừ vào cấu trúc tương quan không gian và dạng dao động. Khi chiều dài tương quan hữu hạn, tương quan dương hoàn toàn giữa hai trường chưa nhất thiết làm triệt tiêu biến thiên của trị riêng, do độ cứng và khối lượng được hình thành với

các trọng số không gian khác nhau. Khi các chiều dài tương quan cùng tiến tới vô cùng, hai trường có cùng COV và tương quan dương hoàn toàn, COV của trị riêng tiến tới không.

II. Những hạn chế của Luận án

Khung SFEM chính được xây dựng trên cơ sở lý thuyết dầm Euler–Bernoulli uốn phẳng, tập trung vào ứng xử tổng thể và chưa xét ảnh hưởng của biến dạng cắt. Sự dịch chuyển ngẫu nhiên của tâm đàn hồi và các thành phần ghép ngoài mặt phẳng chưa được đưa trực tiếp vào khung SFEM, mặc dù đã được xem xét trong một số mô hình đối chứng.

Tính chất vật liệu được mô hình hóa bằng các trường ngẫu nhiên Gaussian dừng hai chiều và ba chiều. Luận án chưa khảo sát trường phi Gaussian, trường không dừng và chưa hiệu chỉnh các tham số trường ngẫu nhiên từ số liệu thực nghiệm của một loại vật liệu cụ thể.

Phương pháp phân tích sử dụng xấp xỉ nhiễu bậc nhất, chưa xét đóng góp của các thành phần bậc cao. Khảo sát được giới hạn ở COV đầu vào không vượt quá 20%; độ chính xác phụ thuộc vào loại đáp ứng, mức biến thiên và cấu trúc tương quan của trường vật liệu. Các kết luận về độ chính xác chỉ áp dụng cho những cấu hình đã được kiểm chứng.

Kết quả nghiên cứu tập trung vào kỳ vọng, phương sai và COV của chuyển vị, trị riêng dao động và tải trọng tới hạn; chưa mở rộng sang đánh giá xác suất mất an toàn của kết cấu. Việc kiểm chứng dựa trên khảo sát hội tụ, các trường hợp giới hạn, mô phỏng MCS và tài liệu đã công bố, chưa có kiểm chứng thực nghiệm.

III. Kiến nghị hướng nghiên cứu tiếp theo

Trên cơ sở kết quả đạt được và những hạn chế của luận án, đề xuất các hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- ✓ Mở rộng khung SFEM để xét phi tuyến hình học và vật liệu, sự thay đổi vị trí trục trung hòa và các thành phần ghép trong quá trình chịu tải.
- ✓ Phát triển SFEM trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao nhằm phân tích dầm có ảnh hưởng đáng kể của biến dạng cắt.
- ✓ Nghiên cứu các xấp xỉ ngẫu nhiên bậc cao để cải thiện độ chính xác khi mức biến thiên của vật liệu tăng; mở rộng phân tích phân bố xác suất của đáp ứng và đánh giá độ tin cậy kết cấu.
- ✓ Mở rộng mô hình sang trường vật liệu phi Gaussian, không dừng và các nguồn bất định khác như tải trọng, kích thước hình học, điều kiện biên hoặc suy giảm vật liệu theo thời gian; kết hợp số liệu thực nghiệm để hiệu chỉnh và kiểm chứng mô hình.

- ✓ Nghiên cứu kết hợp SFEM với học sâu để xây dựng mô hình thay thế, hỗ trợ dự đoán nhanh đáp ứng ngẫu nhiên và giảm chi phí tính toán trong các khảo sát nhiều tham số.

DANH MỤC CÁC CÔNG BỐ KHOA HỌC

1. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Stochastic finite element for stability of columns considering the two-dimensional random field of elastic modulus", Results in Engineering 25, pp. 104496. (Tạp chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q1).
2. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Free vibration of beams using stochastic finite element method considering three-dimensional randomness of material properties", *Forces in Mechanics* 19, pp. 100312. (Tạp chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q2).
3. **Nguyen Dang Diem**, Pham Van Dat, Ta Duy Hien (2025), "Analysis of Beams with a Three-dimensional Random Field of the Modulus of Elasticity Using the Stochastic Finite Element Method", *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences* 10(5), pp. 1518-1538. (Tạp chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q2).
4. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Monte Carlo Simulation of a Beam Resting on an Elastic Foundation Considering the Two-Dimensional Stochastic Properties of the Elastic Modulus", *International Journal of Integrated Engineering* 17(5), pp. 65-76. (Tạp chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q3).
5. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien, Dao Sy Dan, Nguyen Duy Hung (2025), "Column Buckling under Stochastic Three-dimensional Material Properties: A Stochastic Finite Element Analysis", *Coupled Systems Mechanics* 14(4), pp. 347-369. (Tạp chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q4).
6. **Nguyen Dang Diem**, Dao Sy Dan, Ta Duy Hien, Dao Ngoc Tien (2025), "Stochastic Stability Analysis of Columns with Randomly Elastic Joint Ends and Two-Dimensional Random Material Properties Using Monte Carlo Simulation", *Journal of Materials Engineering Structures* 12(1), pp. 73-83. (Tạp chí thuộc danh mục WoS/ESCI).
7. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien, Nguyen Trong Hiep, Dao Ngoc Tien (2025), "Analysis of free vibrations of a continuous beam considering the random stiffness of the supports and the two-dimensional random material properties using monte carlo simulation", *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences* 20(4), pp. 1-19. (Tạp chí thuộc danh mục Scopus, Q4).

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

1. Chủ nhiệm đề tài nghiên cứu Khoa học cấp Trường, Phân tích ổn định của cột có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên ba chiều, T2025-PHII_CT-006, Trường Đại học Giao thông vận tải, 2025

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Chu Thanh Bình (2014), *Một phương pháp gần đúng tính độ tin cậy của công trình dao động chịu tải trọng ngẫu nhiên có kể đến sai lệch ngẫu nhiên của các tham số vật liệu và hình học*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Xây dựng Hà Nội, Hà Nội.
2. Lê Công Duy (2014), *Một phương pháp đánh giá mức độ an toàn của kết cấu khung chịu tải trọng động theo lý thuyết tập mờ*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Xây dựng Hà Nội, Hà Nội.
3. Dương Thế Hùng (2010), *Phân tích hệ thanh phẳng có liên kết nửa cứng, vết nứt và có độ cứng, khối lượng phân bố ngẫu nhiên*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Xây dựng Hà Nội, Hà Nội.
4. Dương Thế Hùng (2019), "Phân tích ứng xử kết cấu khung nhà một tầng có vết nứt dưới tác dụng của tải trọng ngẫu nhiên", *TNU Journal of Science and Technology* 195(02), tr. 125-131.
5. Vũ Trọng Huy (2021), *Nghiên cứu sự làm việc của kết cấu nhà xây dựng trong vùng chịu ảnh hưởng động đất ở Việt Nam bằng phương pháp Monte - Carlo cải tiến*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Viện Khoa học Công nghệ Xây dựng, Hà Nội.
6. Nguyễn Ngọc Lâm (2018), "Tính ổn định ngẫu nhiên của thanh mặt cắt thay đổi có liên kết đàn hồi bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo", *Tạp chí Giao thông Vận tải* 3(2018), tr. 20-25.
7. Nguyễn Thị Kim Loan, Nguyễn Xuân Toàn, Nguyễn Duy Thảo, Đặng Công Thuật (2025), "Phân tích dao động của cầu dầm chịu tải trọng di động với các tham số đầu vào ngẫu nhiên bằng phương pháp tiến hóa mật độ xác suất", *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng* 23(7), tr. 27-32.
8. Bùi Đức Năng (2010), *Tính xác suất không hỏng của kết cấu hệ thanh có kể đến các yếu tố ngẫu nhiên về vật liệu, hình học của kết cấu và tải trọng*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
9. Đoàn Như Sơn, Phạm Thị Ly, Nguyễn Phan Anh (2022), "Phân tích độ nhạy của các biến ngẫu nhiên đến độ võng kết cấu dàn", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải* 72(2022), tr. 80-84.
10. Nguyễn Chí Thọ (2021), *Phân tích dao động kết cấu hệ dầm, khung không gian có lắp thiết bị tiêu tán năng lượng chịu tải trọng ngẫu nhiên*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.

11. Nguyễn Chí Thọ, Nguyễn Trí Tá, Vũ Văn Hoàng (2019), "Phân tích dao động của dầm có lắp thiết bị tiêu tán năng lượng chịu tải trọng ngẫu nhiên", *Journal of Science and Technique - Section on Special Construction Engineering* Chuyên san 02 (6/2019), tr. 30-39.
12. Vũ Văn Toản (2017), *Phân tích dao động của kết cấu nhịp cầu dưới tác động của hoạt tải khai thác có xét đến độ mấp mô mặt cầu*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Giao thông Vận tải, Hà Nội.
13. Lê Anh Tuấn (2003), *Phản ứng động ngẫu nhiên phi tuyến của công trình biển*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.

Tiếng Anh

14. Adhikari S. (2011), "Doubly Spectral Stochastic Finite-Element Method for Linear Structural Dynamics", *Journal of Aerospace Engineering* 24(3), pp. 264-276.
15. Adhikari S., Manohar C.S. (2000), "Transient Dynamics of Stochastically Parametered Beams", *Journal of Engineering Mechanics* 126(11), pp. 1131-1140.
16. Adhikari S., Mukherjee S. (2022), "The exact element stiffness matrices of stochastically parametered beams", *Probabilistic Engineering Mechanics* 69, 103317.
17. Amir M., Kim S.-W., Choi D. (2024), "Comparative static analysis of functionally graded porous curved beams: Deterministic versus stochastic approaches", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 59(8), pp. 559-574.
18. Anantha Ramu S., Ganesan R. (1992), "Stability of stochastic Leipholz column with stochastic loading", *Archive of Applied Mechanics* 62(6), pp. 363-375.
19. Ariaratnam T., Schuëller G.I. (2020), *Stochastic structural dynamics: progress in theory and applications*, CRC Press.
20. Arregui-Mena J.D., Margetts L., Mummery P.M. (2016), "Practical Application of the Stochastic Finite Element Method", *Archives of Computational Methods in Engineering* 23(1), pp. 171-190.
21. Arsene C.T.C., Gabrys B. (2013), "Probabilistic finite element predictions of the human lower limb model in total knee replacement", *Medical Engineering & Physics* 35(8), pp. 1116-1132.
22. Asprone D., Auricchio F., Menna C., Morganti S., Prota A., Reali A. (2013), "Statistical finite element analysis of the buckling behavior of honeycomb structures", *Composite Structures* 105, pp. 240-255.

23. Bažant Z.P., Cedolin L. (2003), *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture, and damage theories*, Dover Publications, Mineola, NY.

24. Bucher C.G., Shinozuka M. (1988), "Structural Response Variability II", *Journal of Engineering Mechanics* 114(12), pp. 2035-2054.

25. Chakraborty S., Bhattacharyya B. (2002), "An efficient 3D stochastic finite element method", *International Journal of Solids and Structures* 39(9), pp. 2465-2475.

26. Chang T.P., Chang H.C. (1994), "Stochastic dynamic finite element analysis of a nonuniform beam", *International Journal of Solids and Structures* 31(5), pp. 587-597.

27. Chen N.-Z., Guedes Soares C. (2008), "Spectral stochastic finite element analysis for laminated composite plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197(51-52), pp. 4830-4839.

28. Chryssanthopoulos M.K., Poggi C. (1995), "Stochastic imperfection modelling in shell buckling studies", *Thin-Walled Structures* 23(1-4), pp. 179-200.

29. Combescure A. (1997), "Influence of initial imperfections on the collapse of thin walled structures", In: Predeleanu M., Gilormini P. (eds.), *Advanced Methods in Materials Processing Defects*, Studies in Applied Mechanics, vol. 45, Elsevier.

30. Cortés J.-C., López-Navarro E., Martínez-Rodríguez P., Romero J.-V., Roselló M.-D. (2023), "Extending the analysis of the Euler–Bernoulli model for a stochastic static cantilever beam: Theory and simulations", *Probabilistic Engineering Mechanics* 74, 103493.

31. Dang Xuan Hung (2023), "Nonlinear bending analysis of FGM beams under various boundary conditions by Ritz method", *International Journal of GEOMATE* 25(109), pp. 1-8.

32. Deodatis G. (1991), "Weighted Integral Method. I: Stochastic Stiffness Matrix", *Journal of Engineering Mechanics* 117(8), pp. 1851-1864.

33. Deodatis G., Micaletti R.C. (2001), "Simulation of Highly Skewed Non-Gaussian Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 127(12), pp. 1284-1295.

34. Deodatis G., Shinozuka M. (1988), "Auto-Regressive Model for Nonstationary Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 114(11), pp. 1995-2012.

35. Deodatis G., Shinozuka M. (1991), "Weighted Integral Method. II: Response Variability and Reliability", *Journal of Engineering Mechanics* 117(8), pp. 1865-1877.

36. Deodatis G., Wall W., Shinozuka M. (1991), "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method", In: Spanos P.D., Brebbia C.A. (eds.), *Computational Stochastic Mechanics*, Springer, Dordrecht, pp. 395-406.

37. Do Thi Hang, Nguyen Xuan Tung, Dao Ngoc Tien (2022), "Stochastic buckling analysis of non-uniform columns using stochastic finite elements with discretization random field by the point method", *Engineering, Technology & Applied Science Research* 12(2), pp. 8458-8462.

38. Donaldson F.E., Coburn J.C., Siegel K.L. (2014), "Total hip arthroplasty head–neck contact mechanics: A stochastic investigation of key parameters", *Journal of Biomechanics* 47(7), pp. 1634-1641.

39. Dong X.N., Luo Q., Sparkman D.M., Millwater H.R., Wang X. (2010), "Random field assessment of nanoscopic inhomogeneity of bone", *Bone* 47(6), pp. 1080-1084.

40. Elishakoff I., Impollonia N., Ren Y.J. (1999), "New exact solutions for randomly loaded beams with stochastic flexibility", *International Journal of Solids and Structures* 36(16), pp. 2325-2340.

41. Elishakoff I., Ren Y. (2003), *Finite element methods for structures with large stochastic variations*, Oxford University Press, Oxford.

42. Field R.V., Grigoriu M. (2004), "On the accuracy of the polynomial chaos approximation", *Probabilistic Engineering Mechanics* 19(1-2), pp. 65-80.

43. Saavedra Flores E.I., DiazDelaO F.A., Friswell M.I., Sienz J. (2012), "A computational multi-scale approach for the stochastic mechanical response of foam-filled honeycomb cores", *Composite Structures* 94(5), pp. 1861-1870.

44. Friedman Z., Kosmatka J.B. (1992), "Exact stiffness matrix of a nonuniform beam—I. Extension, torsion, and bending of a Bernoulli-Euler beam", *Computers & Structures* 42(5), pp. 671-682.

45. Ganesan R., Kowda V.K. (2005), "Buckling of Composite Beam-columns with Stochastic Properties", *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 24(5), pp. 513-543.

46. Geißendörfer M., Liebscher A., Proppe C., Redenbach C., Schwarzer D. (2014), "Stochastic multiscale modeling of metal foams", *Probabilistic Engineering Mechanics* 37, pp. 132-137.

47. Ghanem R. (1999), "Stochastic Finite Elements with Multiple Random Non-Gaussian Properties", *Journal of Engineering Mechanics* 125(1), pp. 26-40.

48. Ghanem R., Brzakala W. (1996), "Stochastic Finite-Element Analysis of Soil Layers with Random Interface", *Journal of Engineering Mechanics* 122(4), pp. 361-369.

49. Ghanem R., Spanos P.D. (1990), “Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements”, *Journal of Applied Mechanics* 57(1), pp. 197-202.

50. Ghanem R.G., Kruger R.M. (1996), “Numerical solution of spectral stochastic finite element systems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129(3), pp. 289-303.

51. Ghanem R.G., Spanos P.D. (1991), “Stochastic Finite Element Method: Response Statistics”, In: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer, New York, NY, pp. 101-119.

52. Ghanem R.G., Spanos P.D. (2003), *Stochastic finite elements: a spectral approach*, Dover Publications, Mineola, NY.

53. Ghanem R.G., Spanos P.D. (1991), “Spectral Stochastic Finite-Element Formulation for Reliability Analysis”, *Journal of Engineering Mechanics* 117(10), pp. 2351-2372.

54. Griffiths D.V., Paiboon J., Huang J., Fenton G.A. (2012), “Homogenization of geomaterials containing voids by random fields and finite elements”, *International Journal of Solids and Structures* 49(14), pp. 2006-2014.

55. Grigoriu M. (2006), “Evaluation of Karhunen–Loève, Spectral, and Sampling Representations for Stochastic Processes”, *Journal of Engineering Mechanics* 132(2), pp. 179-189.

56. Guedes J., Kikuchi N. (1990), “Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83(2), pp. 143-198.

57. Guo T., Frangopol D.M., Chen Y. (2012), “Fatigue reliability assessment of steel bridge details integrating weigh-in-motion data and probabilistic finite element analysis”, *Computers & Structures* 112-113, pp. 245-257.

58. Gupta S., Manohar C.S. (2002), “Dynamic stiffness method for circular stochastic Timoshenko beams: response variability and reliability analyses”, *Journal of Sound and Vibration* 253(5), pp. 1051-1085.

59. Haldar A., Mahadevan S. (2000), *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*, John Wiley & Sons, New York, NY.

60. Hatami-Marbini H., Shahsavari A., Picu R.C. (2013), “Multiscale modeling of semiflexible random fibrous structures”, *Computer-Aided Design* 45(1), pp. 77-83.

61. Himeur N., Menasria A., Bouhadra A., Chitour M., Refrafi S., Guessoum L., Ouchene A., Lebouazda S. (2024), “Buckling and bending analysis of porous fg beam using a simple integral QUASI-3D theory”, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics* 23(4), pp. 30-41.

62. Hoang Xuan Nguyen, Ta Duy Hien, Lee J., Nguyen Xuan Hung (2017), "Stochastic buckling behaviour of laminated composite structures with uncertain material properties", *Aerospace Science and Technology* 66, pp. 274-283.
63. Hosseini S.A.A., Khadem S.E. (2005), "Free vibration analysis of rotating beams with random properties", *Structural Engineering and Mechanics* 20(3), pp. 293-312.
64. Hughes I., Hase T. (2010), *Measurements and their uncertainties: a practical guide to modern error analysis*, Oxford University Press, Oxford.
65. Hurtado J.E., Barbat A.H. (1998), "Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics", *Archives of Computational Methods in Engineering* 5(1), pp. 3-29.
66. Ibrahim A.R., Makhloof D.A. (2024), "Stochastic analysis and reliability assessment of critical RC structural components considering material properties uncertainty", *Structural Safety* 107, 102412.
67. Jeong G.Y. (2008), *Tensile properties of loblolly pine strands using digital image correlation and stochastic finite element method*, Ph.D. dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
68. Jeong G.Y., Hindman D.P. (2009), "Ultimate tensile strength of loblolly pine strands using stochastic finite element method", *Journal of Materials Science* 44(14), pp. 3824-3832.
69. Kala Z., Valeš J., Jönsson J. (2017), "Random fields of initial out of straightness leading to column buckling", *Journal of Civil Engineering and Management* 23(7), pp. 902-913.
70. Kamiński M., Świta P. (2015), "Structural stability and reliability of the underground steel tanks with the Stochastic Finite Element Method", *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 15(2), pp. 593-602.
71. Kardara A., Bucher C.G., Shinozuka M. (1989), "Structural Response Variability III", *Journal of Engineering Mechanics* 115(8), pp. 1726-1747.
72. Knabe W., Przewłócki J., Różyński G. (1998), "Spatial averages for linear elements for two-parameter random field", *Probabilistic Engineering Mechanics* 13(3), pp. 147-167.
73. Koizumi M. (1997), "FGM activities in Japan", *Composites Part B: Engineering* 28(1-2), pp. 1-4.
74. Kurtz S.M., Edidin A.A. (eds.) (2006), *Spine technology handbook*, Academic Press, Burlington, MA.

75. Laz P.J., Browne M. (2010), "A review of probabilistic analysis in orthopaedic biomechanics", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* 224(8), pp. 927-943.

76. Le Minh Thai, Doan Trac Luat, Tran Van Ke, Minh Phung Van (2023), "Finite-Element Modeling for Static Bending Analysis of Rotating Two-Layer FGM Beams with Shear Connectors Resting on Imperfect Elastic Foundations", *Journal of Aerospace Engineering* 36(3), 04023013.

77. Li C.C., Der Kiureghian A. (1993), "Optimal Discretization of Random Fields", *Journal of Engineering Mechanics* 119(6), pp. 1136-1154.

78. Logan D.L. (2011), *A first course in the finite element method*, Cengage Learning, Stamford, CT.

79. Ly Hai Bang, Desceliers C., Le Lu Minh, Le Tien Thinh, Pham Thai Binh, Nguyen Ngoc Long, Doan Van Thuan, Le Minh (2019), "Quantification of Uncertainties on the Critical Buckling Load of Columns under Axial Compression with Uncertain Random Materials", *Materials* 12(11), 1828.

80. Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C. (1997), "Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements", *Structural Safety* 19(3), pp. 283-336.

81. Moens D., Vandepitte D. (2006), "Recent advances in non-probabilistic approaches for non-deterministic dynamic finite element analysis", *Archives of Computational Methods in Engineering* 13(3), pp. 389-464.

82. Nguyen Phu Cuong, Nguyen Van Thuan, Ta Duy Hien (2022), "Stochastic Free Vibration Analysis of Beam on Elastic Foundation with the Random Field of Young's Modulus Using Finite Element Method and Monte Carlo Simulation", In: Ha-Minh C., Tang A.M., Bui T.Q., Vu X.H., Huynh D.V.K. (eds.), *CIGOS 2021, Emerging Technologies and Applications for Green Infrastructure*, Lecture Notes in Civil Engineering, vol. 203, Springer, Singapore, pp. 499-506.

83. Nguyen Thi Nhung, Ta Duy Hien, Nguyen Van Thuan, Dao Ngoc Tien (2022), "Stochastic finite element analysis of the free vibration of non-uniform beams with uncertain material", *Journal of Materials and Engineering Structures* 9(1), pp. 29-37.

84. Nguyen Van Thuan, Noh H.C. (2019), "The Stochastic Finite Element in the Natural Frequency of Functionally Graded Material Beams", In: Ebrahimi F. (ed.), *Mechanics of Functionally Graded Materials and Structures*, IntechOpen, London.

85. Nguyen Van Thuan, Ta Duy Hien (2020), "Stochastic Perturbation-Based Finite Element for Free Vibration of Functionally Graded Beams with an Uncertain Elastic Modulus", *Mechanics of Composite Materials* 56(4), pp. 485-496.

86. Niemeyer F., Wilke H.-J., Schmidt H. (2012), "Geometry strongly influences the response of numerical models of the lumbar spine—A probabilistic finite element analysis", *Journal of Biomechanics* 45(8), pp. 1414-1423.

87. Noh H.C. (2011), "Stochastic finite element analysis of composite plates considering spatial randomness of material properties and their correlations", *Steel and Composite Structures* 11(2), pp. 115-130.

88. Noh H.C. (2014), "Evaluation of Response Variability of Functionally Graded Material Beam with Varying Sectional Area due to Spatial Randomness in Elastic Modulus along Axial Direction", *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea* 27(3), pp. 199-206.

89. Nouy A. (2009), "Recent Developments in Spectral Stochastic Methods for the Numerical Solution of Stochastic Partial Differential Equations", *Archives of Computational Methods in Engineering* 16(3), pp. 251-285.

90. Ohser J., Schladitz K. (2009), *3D images of materials structures: processing and analysis*, Wiley-VCH, Weinheim.

91. Ostoja-Starzewski M., Woods A. (2003), "Spectral finite elements for vibrating rods and beams with random field properties", *Journal of Sound and Vibration* 268(4), pp. 779-797.

92. Paiboon J., Griffiths D.V., Huang J., Fenton G.A. (2013), "Numerical analysis of effective elastic properties of geomaterials containing voids using 3D random fields and finite elements", *International Journal of Solids and Structures* 50(20-21), pp. 3233-3241.

93. Papadopoulos V., Stefanou G., Papadrakakis M. (2009), "Buckling analysis of imperfect shells with stochastic non-Gaussian material and thickness properties", *International Journal of Solids and Structures* 46(14-15), pp. 2800-2808.

94. Peng W., He T. (2021), "Elastoplastic nonlinear analysis of functionally graded beams utilizing the symplectic method", *Archive of Applied Mechanics* 91(12), pp. 4735-4750.

95. Pham Hoang Anh, Nguyen Ba Duan, Vu Tien Chuong (2023), "Fuzzy Uncertainty Propagation in FGM Beam using Taylor's Expansion", *Proceedings of the 7th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2023)*, Hanoi, 11 November 2023, Publishing House for Science and Technology, Hanoi, pp. 189-194.

96. Phoon K.K., Huang S.P., Quek S.T. (2002), "Simulation of second-order processes using Karhunen–Loeve expansion", *Computers & Structures* 80(12), pp. 1049-1060.

97. Puig B., Akian J.-L. (2004), "Non-Gaussian simulation using Hermite polynomials expansion and maximum entropy principle", *Probabilistic Engineering Mechanics* 19(4), pp. 293-305.

98. Puig B., Poirion F., Soize C. (2002), "Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion: convergences and algorithms", *Probabilistic Engineering Mechanics* 17(3), pp. 253-264.

99. Ren Y.J., Elishakoff I., Shinozuka M. (1997), "Finite Element Method for Stochastic Beams Based on Variational Principles", *Journal of Applied Mechanics* 64(3), pp. 664-669.

100. Ross C.F., Berthaume M.A., Dechow P.C., Iriarte-Diaz J., Porro L.B., Richmond B.G., Spencer M., Strait D. (2011), "In vivo bone strain and finite-element modeling of the craniofacial haft in catarrhine primates", *Journal of Anatomy* 218(1), pp. 112-141.

101. Sakamoto S., Ghanem R. (2002), "Polynomial Chaos Decomposition for the Simulation of Non-Gaussian Nonstationary Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 128(2), pp. 190-201.

102. Sakata S., Ashida F., Ohsumimoto K. (2013), "Stochastic homogenization analysis of a porous material with the perturbation method considering a microscopic geometrical random variation", *International Journal of Mechanical Sciences* 77, pp. 145-154.

103. Sasikumar P., Suresh R., Gupta S. (2014), "Stochastic finite element analysis of layered composite beams with spatially varying non-Gaussian inhomogeneities", *Acta Mechanica* 225(6), pp. 1503-1522.

104. Schuëller G.I. (2006), "Developments in stochastic structural mechanics", *Archive of Applied Mechanics* 75(10-12), pp. 755-773.

105. Shariyat M., Rajabi Ghahnavieh M. (2013), "Reliability Analysis of Beams with both Random Material Properties and Random Loading Conditions", *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics* 24(1), pp. 1-18.

106. Shinozuka M. (1987), “Structural Response Variability”, *Journal of Engineering Mechanics* 113(6), pp. 825-842.

107. Shinozuka M., Deodatis G. (1991), “Simulation of Stochastic Processes by Spectral Representation”, *Applied Mechanics Reviews* 44(4), pp. 191-204.

108. Shinozuka M., Jan C.M. (1972), “Digital simulation of random processes and its applications”, *Journal of Sound and Vibration* 25(1), pp. 111-128.

109. Siegkas P., Tagarielli V., Petrinic N. (2014), “Modelling Stochastic Foam Geometries for FE Simulations Using 3D Voronoi Cells”, *Procedia Materials Science* 4, pp. 221-226.

110. Sotomayor O.E., Tippur H.V. (2014), “Role of cell regularity and relative density on elastoplastic compression response of 3-D open-cell foam core sandwich structure generated using Voronoi diagrams”, *Acta Materialia* 78, pp. 301-313.

111. Spanos P.D., Kontsos A. (2008), “A multiscale Monte Carlo finite element method for determining mechanical properties of polymer nanocomposites”, *Probabilistic Engineering Mechanics* 23(4), pp. 456-470.

112. Spanos P.D., Beer M., Red-Horse J. (2007), “Karhunen–Loéve Expansion of Stochastic Processes with a Modified Exponential Covariance Kernel”, *Journal of Engineering Mechanics* 133(7), pp. 773-779.

113. Stefanou G. (2009), “The stochastic finite element method: Past, present and future”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198(9-12), pp. 1031-1051.

114. Strait D.S., Wang Q., Dechow P.C., Ross C.F., Richmond B.G., Spencer M.A., Patel B.A. (2005), “Modeling elastic properties in finite-element analysis: How much precision is needed to produce an accurate model?”, *The Anatomical Record Part A: Discoveries in Molecular, Cellular, and Evolutionary Biology* 283A(2), pp. 275-287.

115. Sudret B., Der Kiureghian A. (2000), *Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report*, Report No. UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, Berkeley, CA.

116. Ta Duy Hien (2020), “A static analysis of nonuniform column by stochastic finite element method using weighted integration approach”, *Transport and Communications Science Journal* 71(4), pp. 359-367.

117. Ta Duy Hien, Nguyen Duy Hung, Nguyen Trung Kien, Noh H.C. (2019), "The variability of dynamic responses of beams resting on elastic foundation subjected to vehicle with random system parameters", *Applied Mathematical Modelling* 67, pp. 676-687.
118. Tai K., Dao M., Suresh S., Palazoglu A., Ortiz C. (2007), "Nanoscale heterogeneity promotes energy dissipation in bone", *Nature Materials* 6(6), pp. 454-462.
119. Takada T. (1990), "Weighted integral method in multi-dimensional stochastic finite element analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics* 5(4), pp. 158-166.
120. Takada T. (1990), "Weighted integral method in stochastic finite element analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics* 5(3), pp. 146-156.
121. Vanmarcke E., Grigoriu M. (1983), "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams", *Journal of Engineering Mechanics* 109(5), pp. 1203-1214.
122. Vryzidis I., Stefanou G., Papadopoulos V. (2013), "Stochastic stability analysis of steel tubes with random initial imperfections", *Finite Elements in Analysis and Design* 77, pp. 31-39.
123. Wang J. (2023), "Analysis of Mechanical Behavior for FGM Beams Under Thermal Loading", *2023 2nd International Conference on Artificial Intelligence and Computer Information Technology (AICIT)*, IEEE, pp. 1-6.
124. Wang Q., Dechow P.C. (2006), "Elastic properties of external cortical bone in the craniofacial skeleton of the rhesus monkey", *American Journal of Physical Anthropology* 131(3), pp. 402-415.
125. Waubke H., Balazs P., Jilge B., Kreuzer W. (2005), "Waves in random layers with arbitrary covariance functions", *Proceedings of the 12th International Congress on Sound and Vibration (ICSV12)*, Lisbon, Portugal, 11-14 July 2005, Paper No. 224.
126. Wu Z., Huang B., Li Y., Pu W. (2017), "A Statistical Model Updating Method of Beam Structures with Random Parameters under Static Load", *Applied Sciences* 7(6), 601.
127. Wu Z., Huang B., Tee K.F., Zhang W. (2021), "A Novel Stochastic Approach for Static Damage Identification of Beam Structures Using Homotopy Analysis Algorithm", *Sensors* 21(7), 2366.
128. Xiu D., Karniadakis G.E. (2002), "The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations", *SIAM Journal on Scientific Computing* 24(2), pp. 619-644.
129. Yamazaki F., Shinozuka M. (1988), "Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields", *Journal of Engineering Mechanics* 114(7), pp. 1183-1197.

130. Yao L., He P., Song S. (2010), “A perturbation stochastic finite-element method for groundwater flow models based on an undetermined-coefficients approach”, *Hydrogeology Journal* 18(7), pp. 1603-1609.

131. Yavari V., Kadivar M.H. (2012), “Application of stochastic finite element method in estimation of elastic constants for NCF composites”, *Mechanics Research Communications* 40, pp. 69-76.

132. Young W.C., Budynas R.G. (2002), *Roark’s formulas for stress and strain*, McGraw-Hill, New York.

133. Yu Y., Ye J., Wang Y., Zhang B., Qi G. (2013), “A mesoscale ultrasonic attenuation finite element model of composites with random-distributed voids”, *Composites Science and Technology* 89, pp. 44-51.

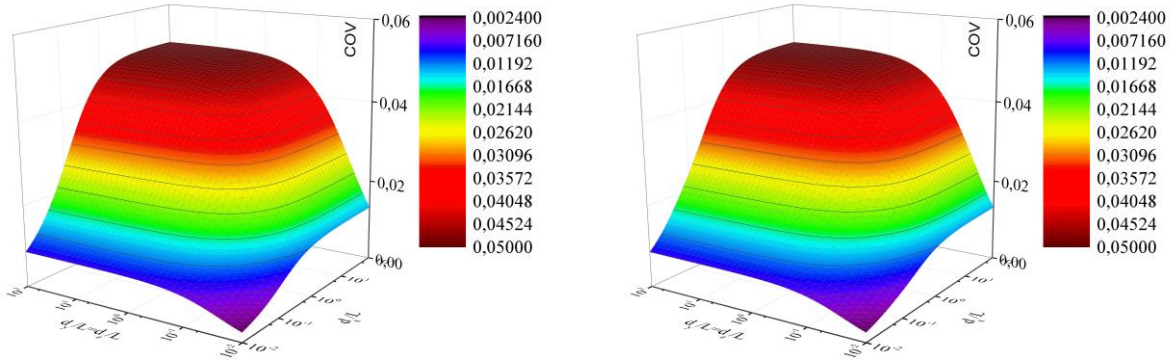
134. Yurdakul Ö., Del Vecchio C., Di Ludovico M., Řoutil L., Avşar Ö. (2019), “Sensitivity of the cyclic response of substandard beam-column joints to material properties”, In: Papadrakakis M., Fragiadakis M. (eds.), *COMPDYN 2019: 7th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Crete, Greece, 24-26 June 2019, ECCOMAS Proceedia, pp. 1115-1125.

135. Zhang J., Ellingwood B. (1994), “Orthogonal Series Expansions of Random Fields in Reliability Analysis”, *Journal of Engineering Mechanics* 120(12), pp. 2660-2677.

136. Zhang J., Ellingwood B. (1995), “Effects of Uncertain Material Properties on Structural Stability”, *Journal of Structural Engineering* 121(4), pp. 705-716.

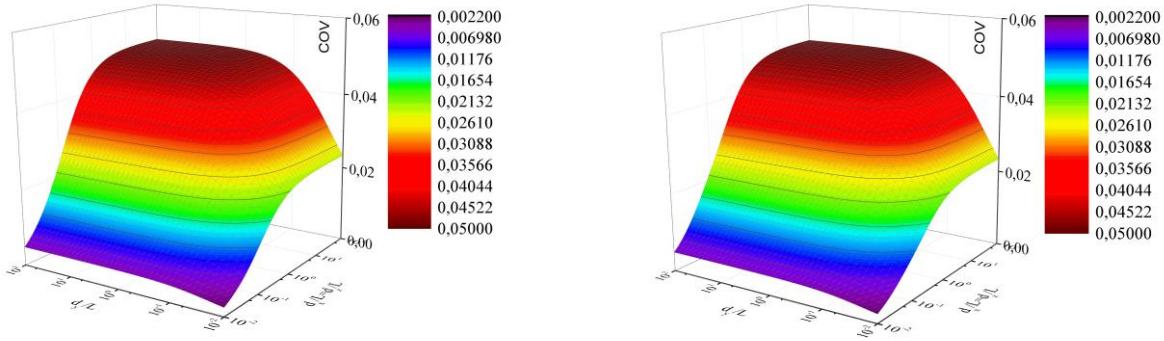
137. Zhang L., Liao W., Fan J., Feng S. (2024), “A semi-analytical simulation method for bi-directional functionally graded cantilever beams under arbitrary static loads”, *Smart Materials and Structures* 33(5), 055051.

PHỤ LỤC A: ẢNH HƯỞNG CỦA CHIỀU DÀI TƯƠNG QUAN ĐẾN COV ĐÁP ỨNG CỦA DẦM



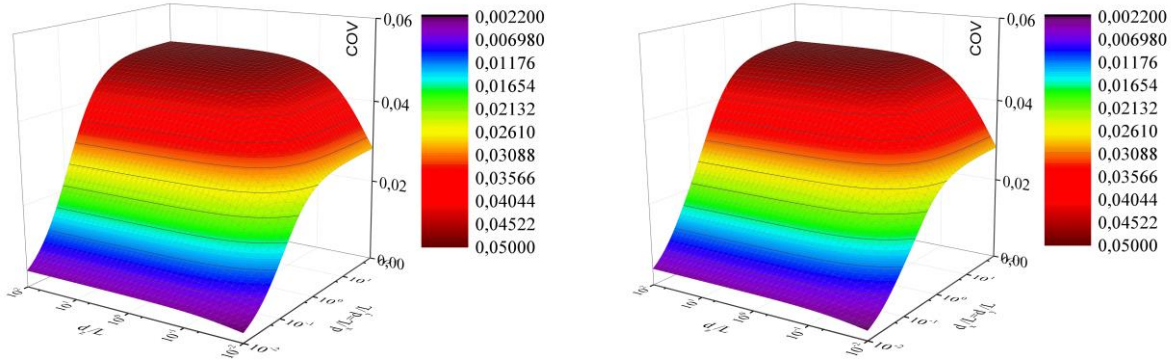
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình A.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)



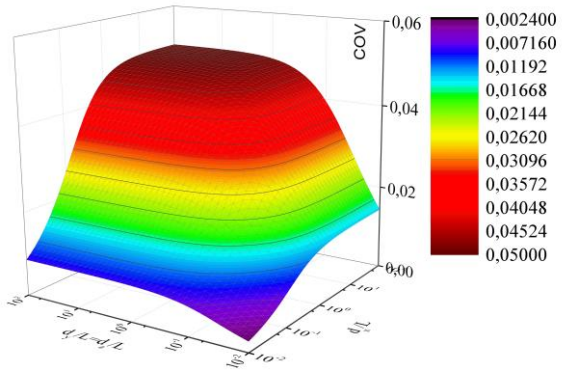
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình A.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)

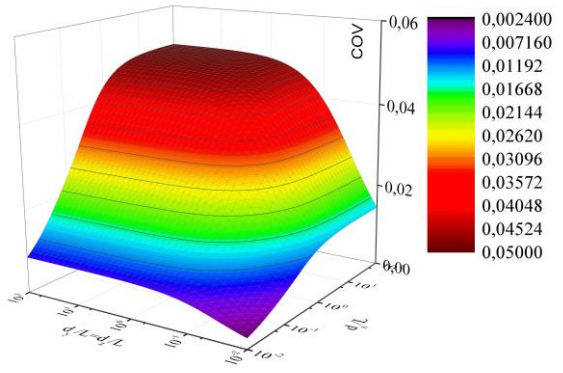


a. λ_1 *b.* λ_2

Hình A.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)

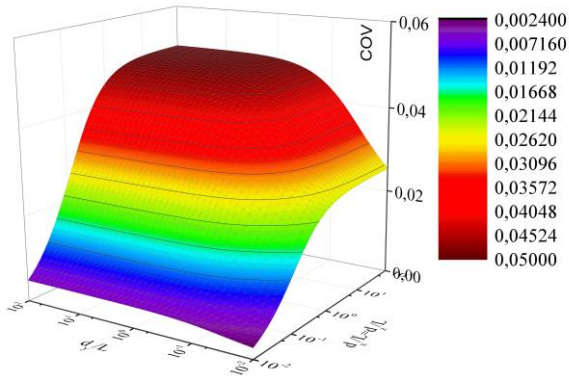


a. λ_1

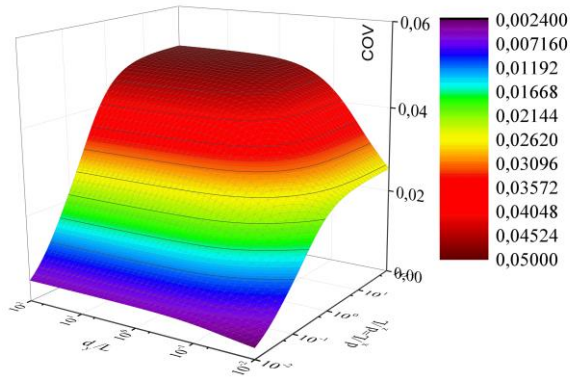


b. λ_2

Hình A.4. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)

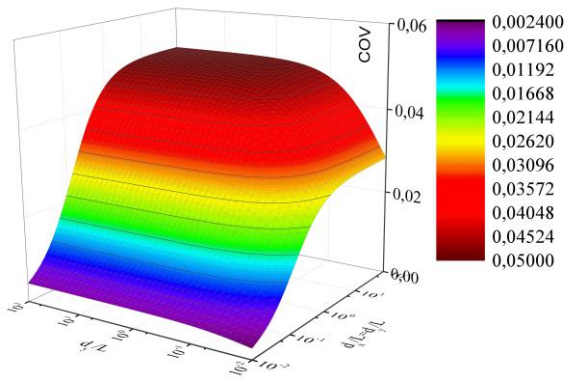


a. λ_1

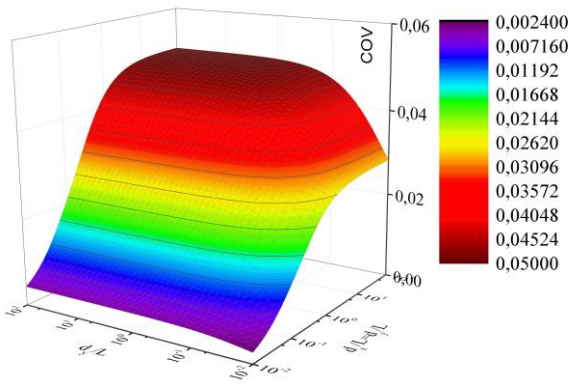


b. λ_2

Hình A.5. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)

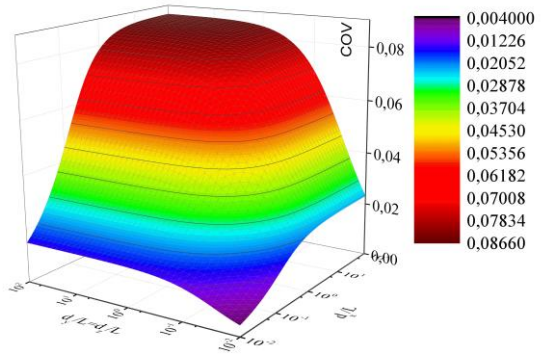


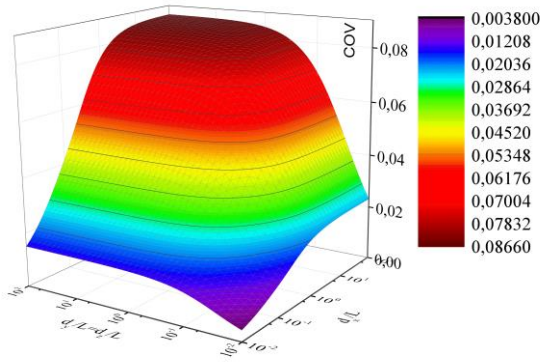
a. λ_1



b. λ_2

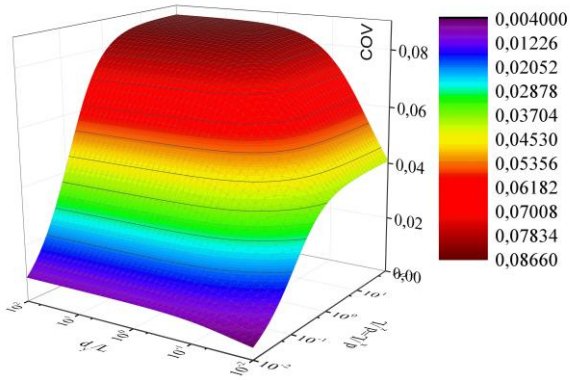
Hình A.6. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)

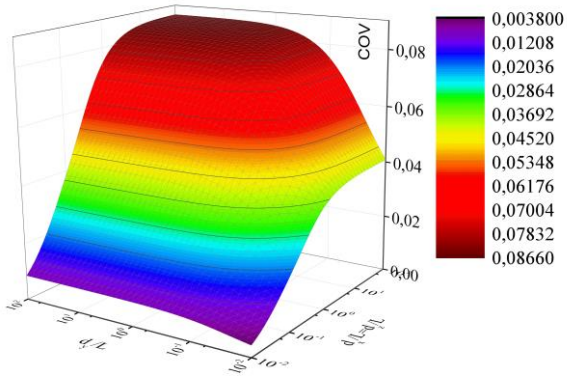




a. λ_1 *b.* λ_2

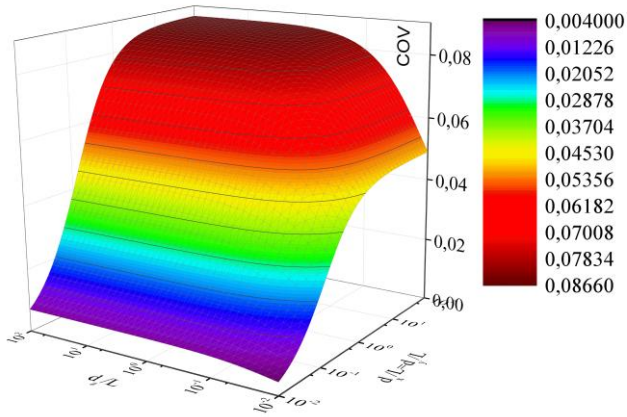
Hình A.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, γ = -0,5)

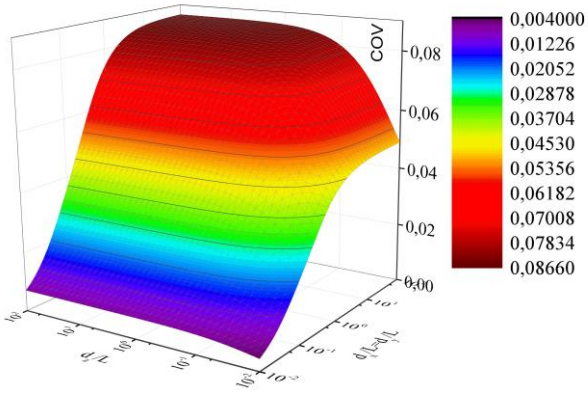




a. λ_1 *b.* λ_2

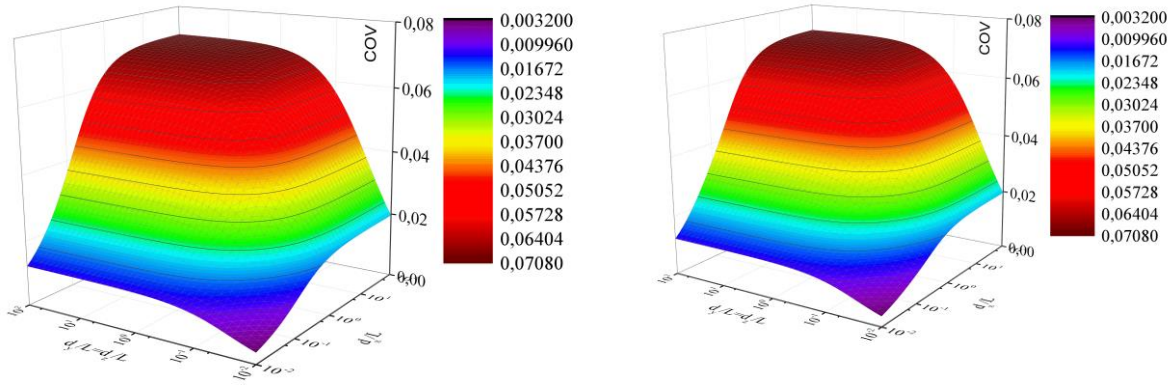
Hình A.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, γ = -0,5)





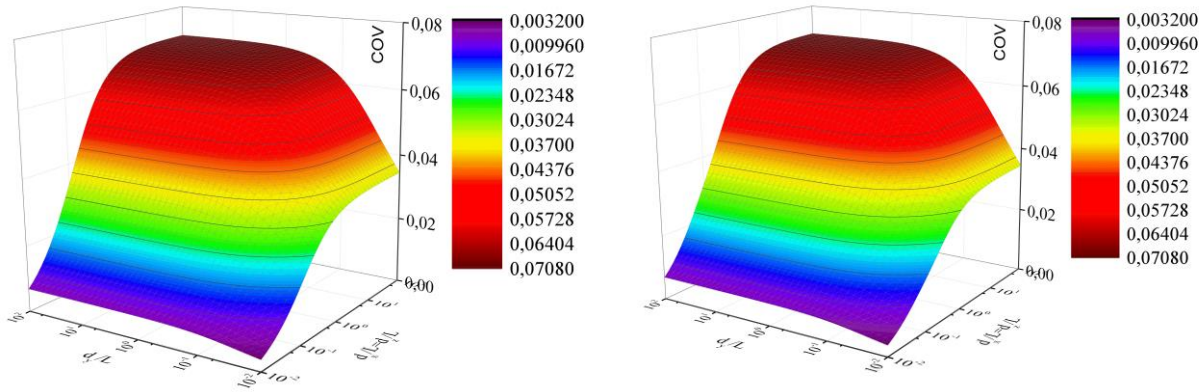
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình A.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, γ = -0,5)



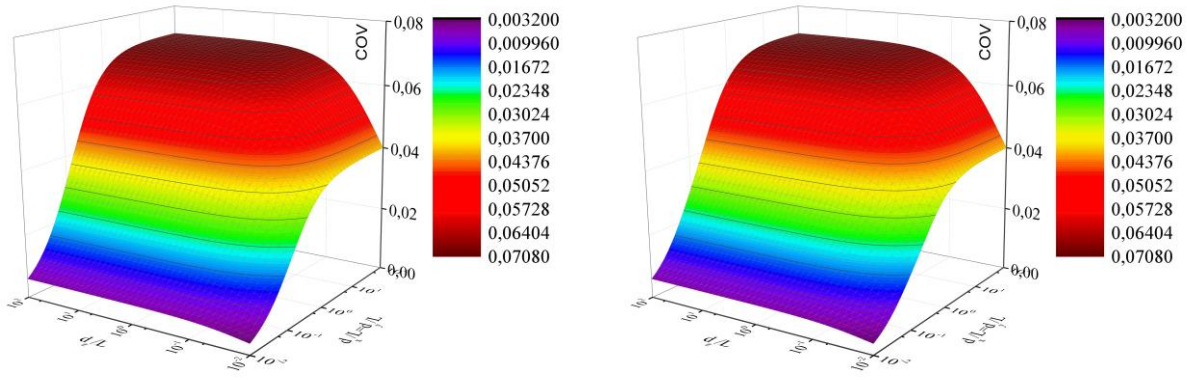
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình A.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, $\gamma = 0$)



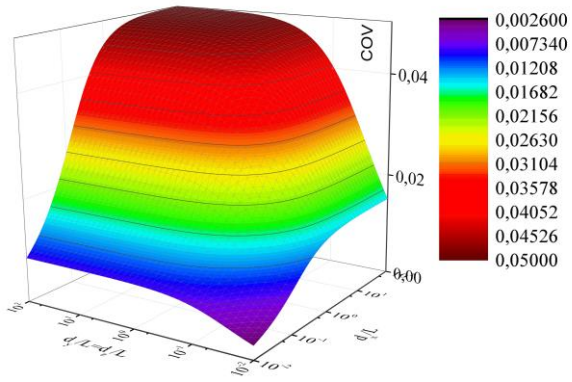
a. λ_1 *b.* λ_2

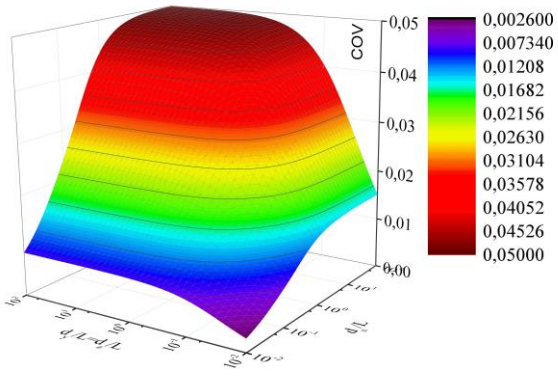
Hình A.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, $\gamma = 0$)



a. λ_1 *b.* λ_2

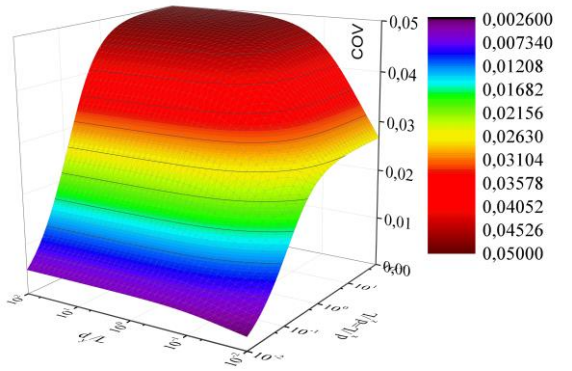
Hình A.12. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, $\gamma = 0$)

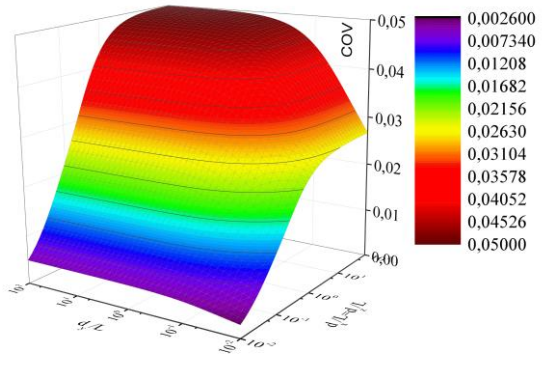




a. λ_1 *b.* λ_2

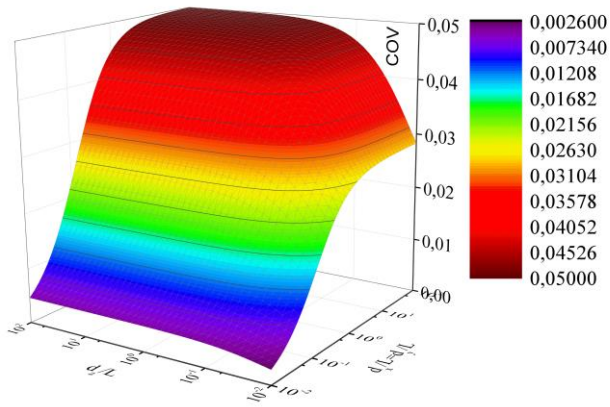
Hình A.13. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, $\gamma = 0{,}5$)

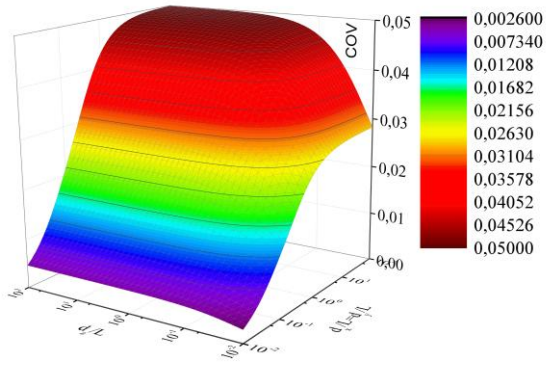




a. λ_1 *b.* λ_2

Hình A.14. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, $\gamma = 0{,}5$)

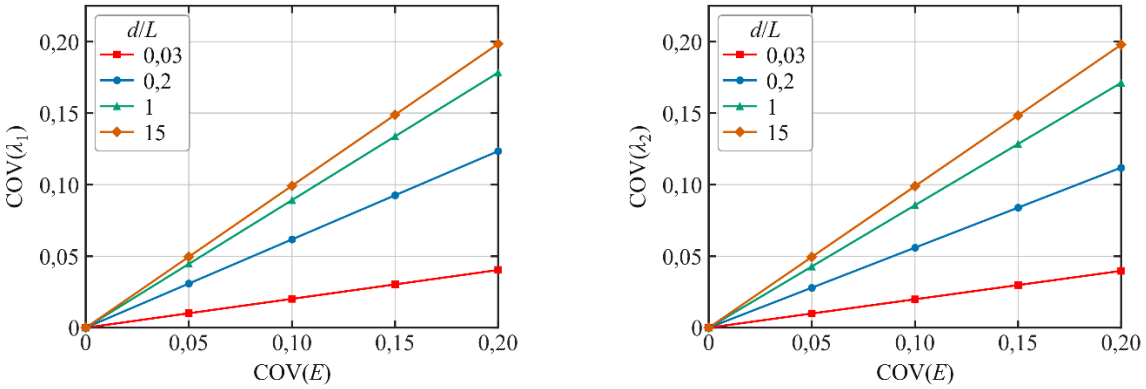




a. λ_1 *b.* λ_2

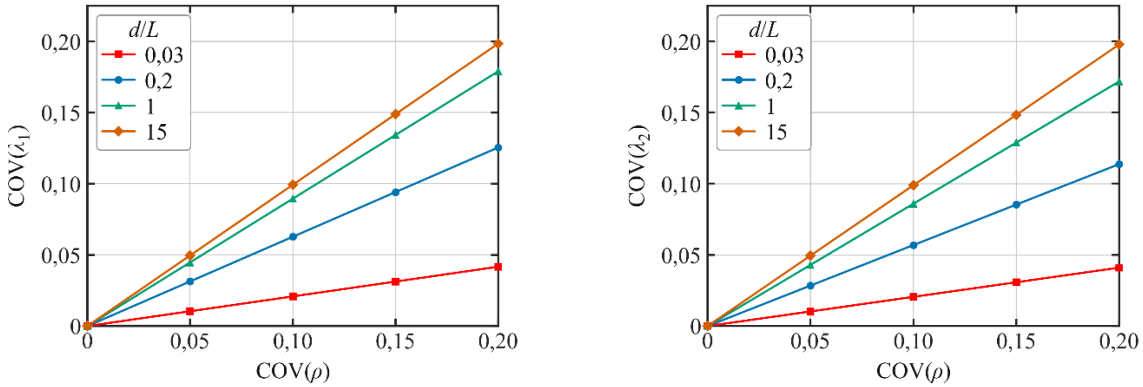
Hình A.15. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, $\gamma = 0{,}5$)

PHỤ LỤC B: QUAN HỆ GIỮA COV TÍNH CHẤT VẬT LIỆU VÀ COV TRỊ RIÊNG DAO ĐỘNG CỦA DẦM



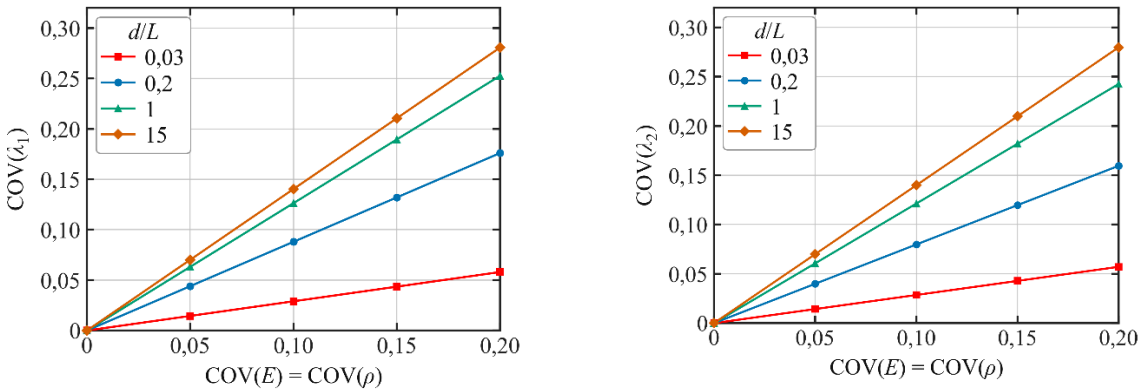
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình B.1. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi



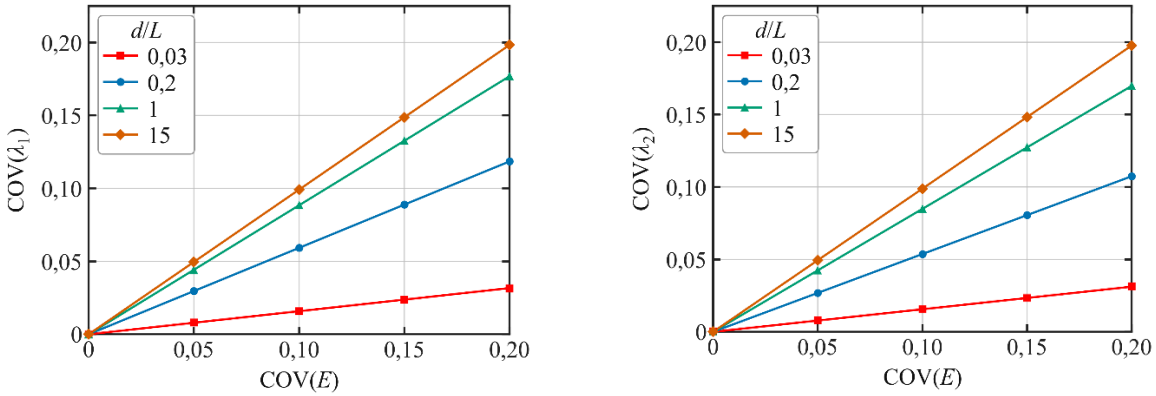
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình B.2. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mật độ khối lượng



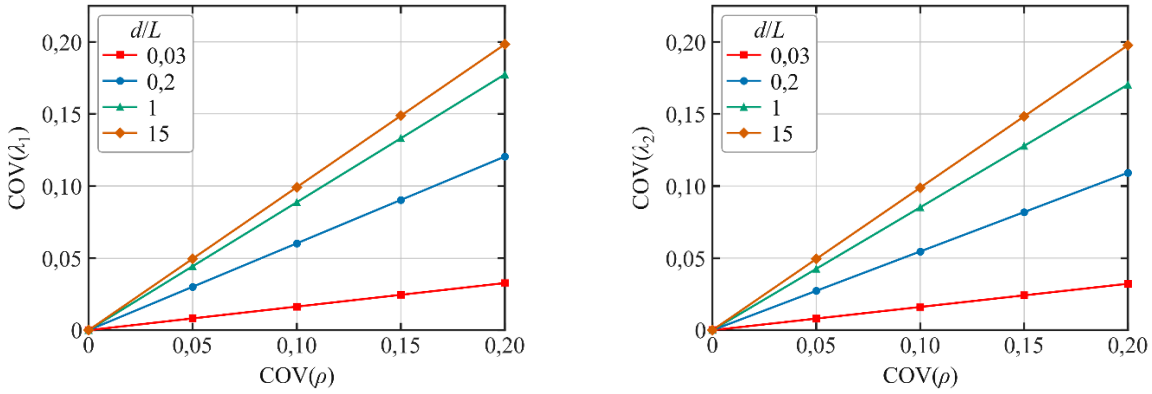
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình B.3. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0$)



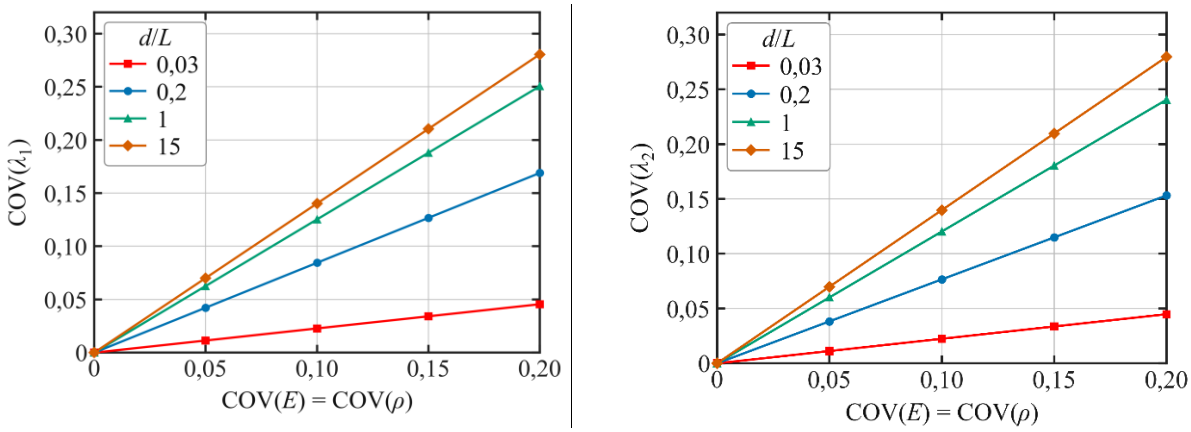
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình B.4. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi



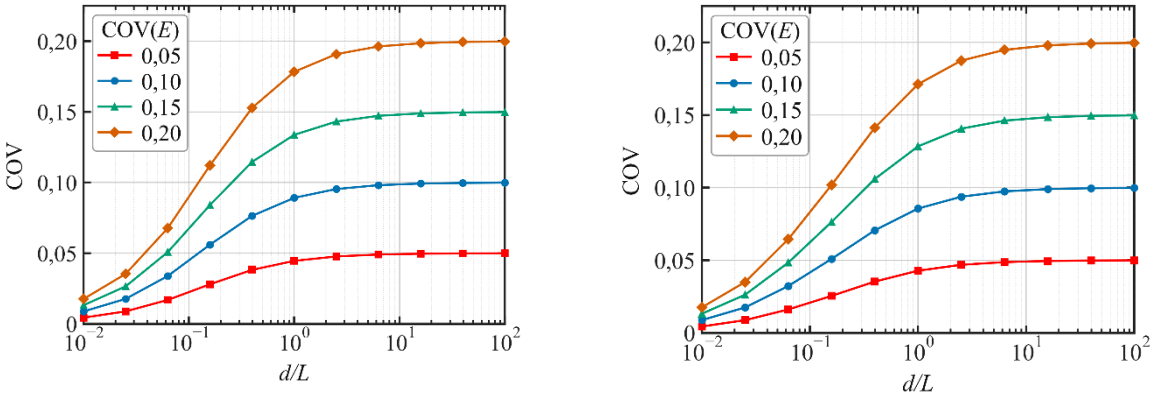
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình B.5. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mật độ khối lượng



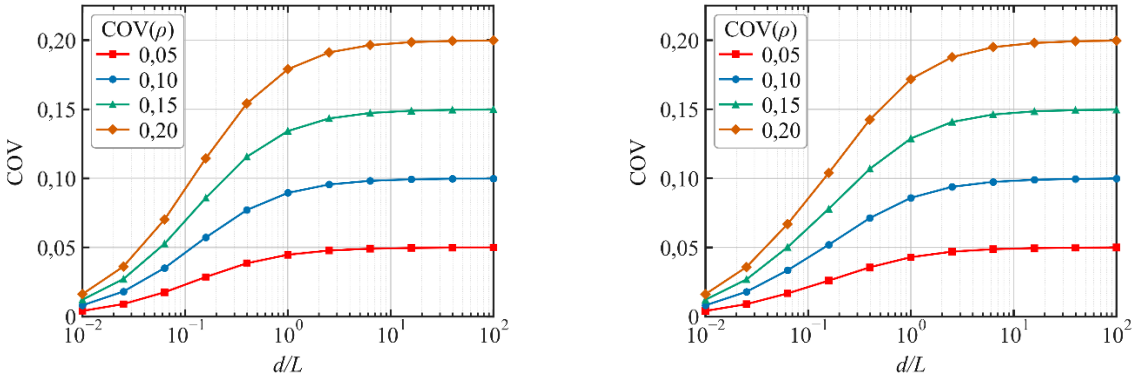
Hình B.6. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0$)

PHỤ LỤC C: ẢNH HƯỞNG ĐỘ LỆCH CHUẨN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN COV GIÁ TRỊ RIÊNG



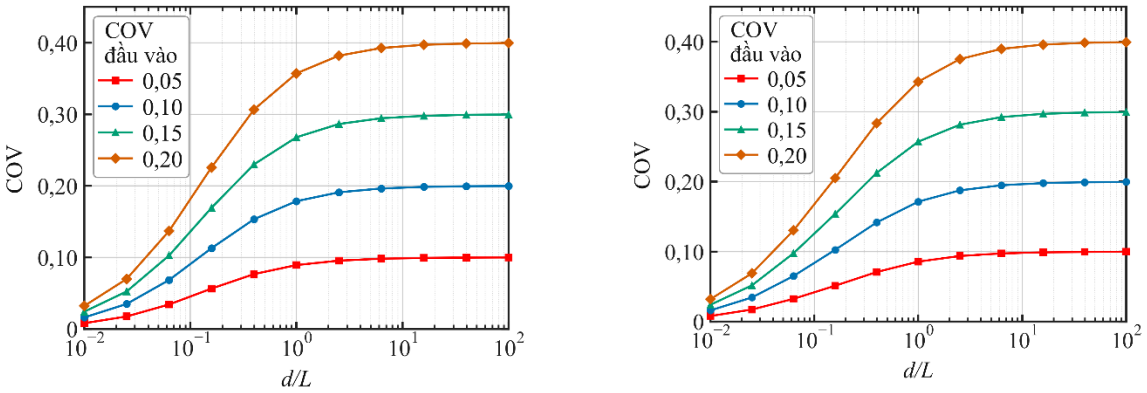
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình C.1. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên)



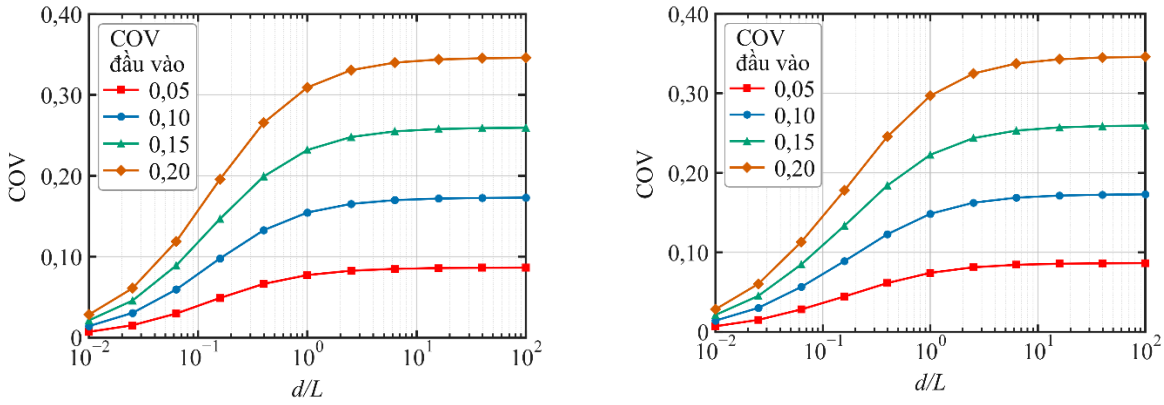
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình C.2. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên)



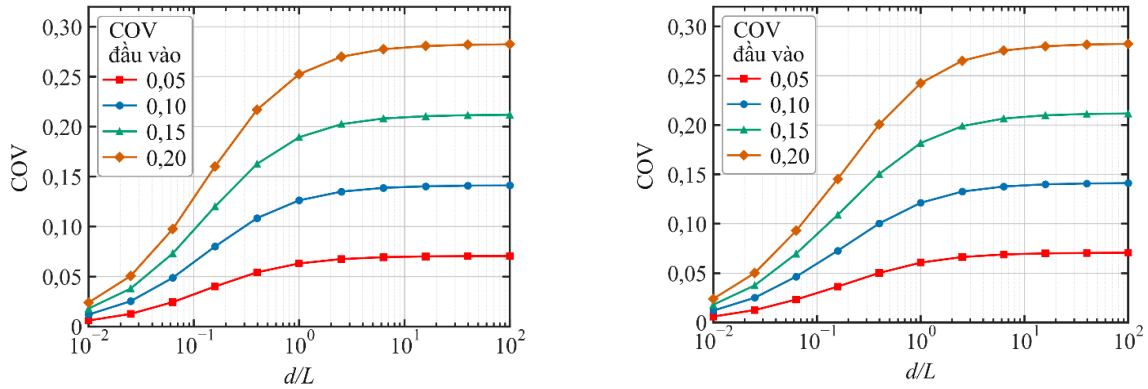
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình C.3. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -1,0)



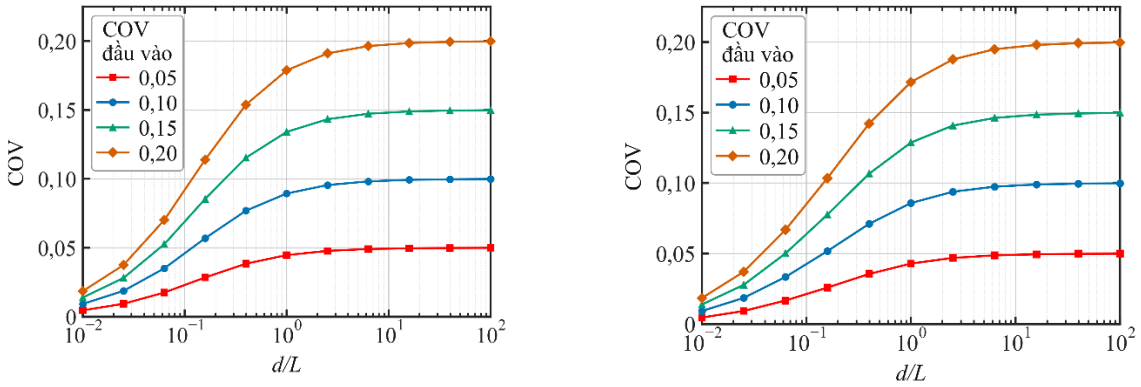
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình C.4. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = -0,5)



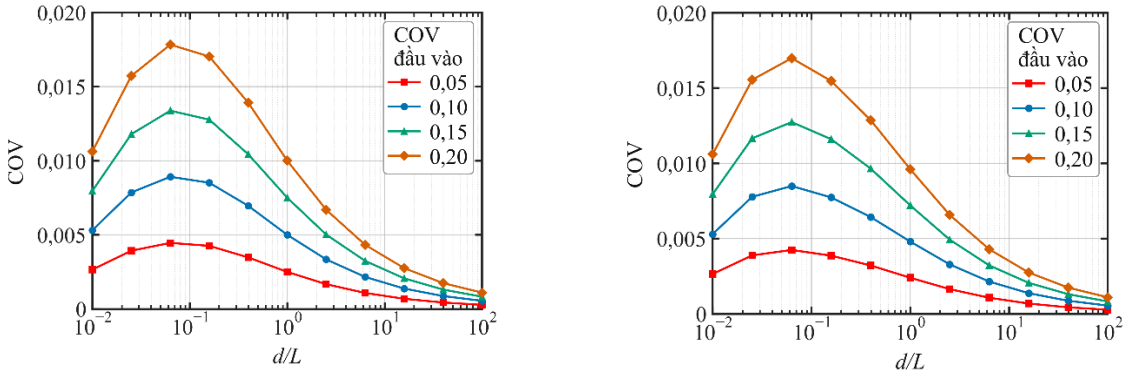
a. λ_1 *b.* λ_2

Hình C.5. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0)



a. λ_1 *b.* λ_2

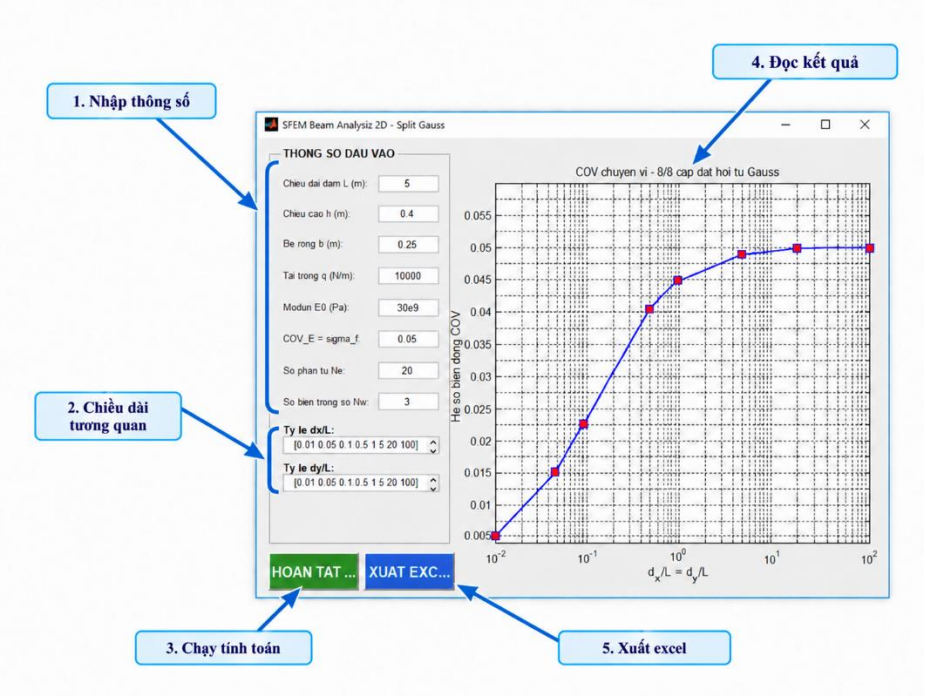
Hình C.6. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 0,5)



a. λ_1 *b.* λ_2

Hình C.7. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng (γ = 1,0)

PHỤ LỤC D: CHƯƠNG TRÌNH TÍNH



Hình D.1. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán tĩnh

A.1. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình được xây dựng với giao diện người dùng đồ họa (GUI) trong môi trường MATLAB và tương thích với MATLAB R2012b trở lên. Hai chương trình phân tích bài toán tĩnh với trường ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều được lưu thành các tệp hàm MATLAB độc lập. Trình tự sử dụng như sau:

1. **Khởi động chương trình:** Mở MATLAB, tạo các tệp hàm MATLAB (*.m), sao chép mã nguồn tương ứng tại Mục A.4 và lưu lần lượt với tên SFEM_GUI_TINH_2D.m và SFEM_GUI_TINH_3D.m.
2. **Mở giao diện:** Trong cửa sổ Command Window, nhập tên chương trình cần thực hiện và nhấn Enter. Giao diện nhập dữ liệu và hiển thị kết quả sẽ được mở.
3. **Nhập dữ liệu:** Tại khung **"THÔNG SỐ ĐẦU VÀO"**, người dùng nhập các thông số hình học, vật liệu, tải trọng, mức độ biến thiên của mô đun đàn hồi và các tỷ số chiều dài tương quan. Đối với bài toán 2D, các chiều dài tương quan d_x và d_y được nhập độc lập; đối với bài toán 3D, các đại lượng d_x, d_y và d_z được nhập độc lập.
4. **Thực hiện tính toán:** Nhấn nút **"TÍNH TOÁN"**. Chương trình tiến hành phân tích và xác định đặc trưng thống kê của chuyển vị.
5. **Quan sát kết quả:** Sau khi tính toán hoàn tất, đồ thị biểu diễn sự thay đổi của hệ số biến thiên của chuyển vị giữa nhịp theo các tỷ số chiều dài tương quan được hiển thị trực tiếp trên giao diện.
6. **Lưu kết quả:** Nhấn nút **"XUẤT EXCEL"** để lưu các thông số đầu vào, chiều dài tương quan và kết quả tính toán dưới dạng tệp Microsoft Excel (*.xlsx), phục vụ cho việc tổng hợp, kiểm tra và xử lý số liệu.

A.2. Tệp dữ liệu đầu vào (Input Data)

Chương trình sử dụng giao diện người dùng đồ họa (GUI), do đó các dữ liệu đầu vào được nhập trực tiếp thông qua các ô nhập liệu trên giao diện. Các thông số gồm:

- **Chieu dai dam L (m):** Chiều dài nhịp dầm, ví dụ L=5 *m*.
- **Chieu cao h (m):** Chiều cao tiết diện chữ nhật, ví dụ h=0.4 *m*.
- **Be rong b (m):** Bề rộng tiết diện chữ nhật, ví dụ b=0.25 *m*.
- **Tai trong q (N/m):** Cường độ tải trọng phân bố đều tác dụng lên dầm, ví dụ q=10000 *N/m*.
- **Modun E_0 (Pa):** Giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi, ví dụ $E_0=30\times10^9$ *Pa*.
- **COV_E:** Hệ số biến thiên của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi E, ví dụ $COV_E=0.05$.
- **So phan tu N_e:** Số phần tử hữu hạn chia đều theo chiều dài dầm. Trong chương trình, N_e được chọn là số nguyên chẵn để bảo đảm tồn tại nút tại giữa nhịp.

- **So hang tu N_W:** Số tích phân trọng số cục bộ sử dụng để biểu diễn thành phần ngẫu nhiên của ma trận độ cứng phần tử; trong mô hình hiện tại N_W=3.
- **Ty le d_x/L:** Vector các tỷ số chiều dài tương quan theo phương dọc trục *x*.
- **Ty le d_y/L:** Vector các tỷ số chiều dài tương quan theo phương chiều cao tiết diện *y*.
- **Ty le d_z/L:** Đối với mô hình trường ngẫu nhiên ba chiều, đây là vector các tỷ số chiều dài tương quan theo phương bề rộng tiết diện *z*.

A.3. Tệp dữ liệu đầu ra (Output Data)

Chương trình xuất tệp Excel gồm bốn trang tính:

- **"KetQua":** Kết quả COV của đáp ứng và trạng thái hội tụ.
- **"ThongSoDauVao":** Thông số đầu vào, đại lượng tất định tham chiếu và thiết lập hội tụ.
- **"HoiTuGauss":** Tổng hợp kết quả kiểm tra hội tụ theo số điểm Gauss.
- **"LichSuGauss":** Chi tiết quá trình kiểm tra qua từng mức tăng số điểm Gauss.

A.4. Bản in câu lệnh chương trình (Source Code)

a. Chương trình phân tích tĩnh ngẫu nhiên hai chiều:

```
function SFEM_GUI_TINH_2D
clc; close all;
hFig=figure('Name','SFEM Beam Analysis 2D - Split Gauss','NumberTitle','off',
...
    'Position',[100 100 1050 650],'Color',[.94 .94
.94],'MenuBar','none','Resize','on');
hPanelInput=uipanel('Parent',hFig,'Title','THONG SO DAU VAO','FontSize',10,
...
    'FontWeight','bold','Position',[.02 .14 .27 .84]);
add_scalar_input(hPanelInput,'Chieu dai dam L (m):','5',.92,'in_L');
add_scalar_input(hPanelInput,'Chieu cao h (m):','0.4',.84,'in_h');
add_scalar_input(hPanelInput,'Be rong b (m):','0.25',.76,'in_b');
add_scalar_input(hPanelInput,'Tai trong q (N/m):','10000',.68,'in_q');
add_scalar_input(hPanelInput,'Modun E0 (Pa):','30e9',.60,'in_E0');
add_scalar_input(hPanelInput,'COV_E = sigma_f:','0.05',.52,'in_sigma_f');
add_scalar_input(hPanelInput,'So phan tu Ne:','40',.44,'in_Ne');
add_scalar_input(hPanelInput,'So bien trong so Nw:','3',.36,'in_Nw');
uicontrol('Parent',hPanelInput,'Style','text','String','Ty le dx/L:', ...
    'HorizontalAlignment','left','FontWeight','bold','Units','normalized',
...
    'Position',[.05 .285 .90 .035],'BackgroundColor',[.94 .94 .94]);
uicontrol('Parent',hPanelInput,'Style','edit', ...
    'String','[0.01 0.05 0.1 0.5 1 5 20 100]','Units','normalized', ...
    'Position',[.05 .245 .90
.045],'Tag','in_ratio_dx','BackgroundColor','white','Max',2);
uicontrol('Parent',hPanelInput,'Style','text','String','Ty le dy/L:', ...
    'HorizontalAlignment','left','FontWeight','bold','Units','normalized',
...
    'Position',[.05 .195 .90 .035],'BackgroundColor',[.94 .94 .94]);
uicontrol('Parent',hPanelInput,'Style','edit', ...
    'String','[0.01 0.05 0.1 0.5 1 5 20 100]','Units','normalized', ...
    'Position',[.05 .155 .90
.045],'Tag','in_ratio_dy','BackgroundColor','white','Max',2);
hBtnRun=uicontrol('Parent',hFig,'Style','pushbutton','String','CHAY TINH
TOAN', ...
    'FontSize',12,'FontWeight','bold','Units','normalized','Position',[.02
.02 .13 .09], ...
    'BackgroundColor',[.2 .6
.2],'ForegroundColor','white','Callback',@run_analysis_callback);
hBtnExcel=uicontrol('Parent',hFig,'Style','pushbutton','String','XUAT EXCEL',
...
    'FontSize',12,'FontWeight','bold','Units','normalized','Position',[.16
.02 .13 .09], ...
    'BackgroundColor',[.2 .4 .8],'ForegroundColor','white','Enable','off',
...
    'Callback',@export_excel_callback);
```

```
hAx=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.36 .15 .60 .75], ...
    'FontSize',10,'Box','on');
grid(hAx,'on'); xlabel(hAx,'Ty le chieu dai tuong quan');
ylabel(hAx,'He so bien dong COV cua chuyen vi'); title(hAx,'Ket qua phan
tich');
    function add_scalar_input(parent,lbl,val,y_pos,tag)

uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'HorizontalAlignment','
left', ...
            'Units','normalized','Position',[.05 y_pos .55
.035],'BackgroundColor',[.94 .94 .94]);

uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',val,'Units','normalized',
...
            'Position',[.60 y_pos .35
.04],'Tag',tag,'BackgroundColor','white');
    end
    function run_analysis_callback(hObject,~)
        set(hFig,'Pointer','watch'); set(hObject,'String','Dang
tinh...','Enable','off');
        set(hBtnExcel,'Enable','off'); drawnow;
        try
            L=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_L'),'String'));
            h=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_h'),'String'));
            b=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_b'),'String'));
            q=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_q'),'String'));
            E0=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_E0'),'String'));

sigma_f=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_sigma_f'),'String'));
            Ne=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_Ne'),'String'));
            Nw=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_Nw'),'String'));

dx_L_input=str2num(get(findobj(hFig,'Tag','in_ratio_dx'),'String'));

dy_L_input=str2num(get(findobj(hFig,'Tag','in_ratio_dy'),'String'));
            vals=[L h b q E0 sigma_f Ne Nw];
            if any(isnan(vals))||any(isinf(vals)), error('Du lieu dau vao
phai la cac so huu han.'); end
            if L<=0||h<=0||b<=0||E0<=0, error('L, h, b va E0 phai lon hon
0.'); end
            if sigma_f<0, error('sigma_f = COV_E phai khong am.'); end
            if Ne<2||abs(Ne-round(Ne))>0, error('So phan tu Ne phai la so
nguyen >= 2.'); end
            Ne=round(Ne);
            if mod(Ne,2)~=0, error('So phan tu Ne phai la so chan de co nut
giua nhip.'); end
            if Nw~=3, error('Mo hinh hien tai yeu cau Nw = 3.'); end
            if isempty(dx_L_input)||isempty(dy_L_input), error('Phai nhap day
du dx/L va dy/L.'); end
            if
~isreal(dx_L_input)||any(isnan(dx_L_input(:)))||any(isinf(dx_L_input(:)))||an
y(dx_L_input(:)<=0)
                error('Tat ca gia tri dx/L phai la so thuc duong huu han.');
            end
            if
~isreal(dy_L_input)||any(isnan(dy_L_input(:)))||any(isinf(dy_L_input(:)))||an
y(dy_L_input(:)<=0)
                error('Tat ca gia tri dy/L phai la so thuc duong huu han.');
            end
            dx_L_input=dx_L_input(:).'; dy_L_input=dy_L_input(:).';
            if numel(dx_L_input)==numel(dy_L_input)
                dx_L_cases=dx_L_input; dy_L_cases=dy_L_input;
```

```
            elseif numel(dx_L_input)==1
                dx_L_cases=dx_L_input*ones(size(dy_L_input));
dy_L_cases=dy_L_input;
            elseif numel(dy_L_input)==1
                dx_L_cases=dx_L_input;
dy_L_cases=dy_L_input*ones(size(dx_L_input));
            else
                error('Neu dx/L va dy/L deu la vector thi hai vector phai co
cung so phan tu.');
            end
            nCase=numel(dx_L_cases); dx_cases=dx_L_cases*L;
dy_cases=dy_L_cases*L;
            I=b*h^3/12; Le=L/Ne; Ndof=2*(Ne+1); K0=zeros(Ndof,Ndof);
            K0_e=E0*I*[12/Le^3 6/Le^2 -12/Le^3 6/Le^2; ...
                     6/Le^2 4/Le -6/Le^2 2/Le; ...
                    -12/Le^3 -6/Le^2 12/Le^3 -6/Le^2; ...
                     6/Le^2 2/Le -6/Le^2 4/Le];
            for e=1:Ne
                id=(2*e-1):(2*e+2); K0(id,id)=K0(id,id)+K0_e;
            end
            P=zeros(Ndof,1); P_e=q*Le/2*[-1;-Le/6;-1;Le/6];
            for e=1:Ne
                id=(2*e-1):(2*e+2); P(id)=P(id)+P_e;
            end
            dof_fixed=[1 Ndof-1]; dof_free=setdiff(1:Ndof,dof_fixed);
            K0_ff=K0(dof_free,dof_free); P_f=P(dof_free); U0=K0_ff\P_f;
            node_mid=Ne/2+1; global_dof_mid=2*node_mid-1;
            idx_mid=find(dof_free==global_dof_mid,1);
            if isempty(idx_mid), error('Khong tim thay bac tu do chuyen vi
tai giua nhip.'); end
            U0_mid=U0(idx_mid);
            if abs(U0_mid)<=eps, error('Chuyen vi tat dinh tai giua nhip qua
nho de tinh COV.'); end
            DeltaK_i_Ext=zeros(Ndof,Ndof,Ne,Nw); coef_DeltaK=E0*b/Le^6;
            DeltaK1_e=coef_DeltaK*[36*Le^2 24*Le^3 -36*Le^2 12*Le^3; ...
                  24*Le^3 16*Le^4 -24*Le^3 8*Le^4; ...
                 -36*Le^2 -24*Le^3 36*Le^2 -12*Le^3; ...
                  12*Le^3 8*Le^4 -12*Le^3 4*Le^4];
            DeltaK2_e=coef_DeltaK*[-144*Le -84*Le^2 144*Le -60*Le^2; ...
                  -84*Le^2 -48*Le^3 84*Le^2 -36*Le^3; ...
                   144*Le 84*Le^2 -144*Le 60*Le^2; ...
                  -60*Le^2 -36*Le^3 60*Le^2 -24*Le^3];
            DeltaK3_e=coef_DeltaK*[144 72*Le -144 72*Le; ...
                  72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2; ...
                 -144 -72*Le 144 -72*Le; ...
                  72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2];
            for e=1:Ne
                id=(2*e-1):(2*e+2);
                DeltaK_i_Ext(id,id,e,1)=DeltaK1_e;
DeltaK_i_Ext(id,id,e,2)=DeltaK2_e; DeltaK_i_Ext(id,id,e,3)=DeltaK3_e;
            end
            Ndof_free=length(dof_free);
DeltaK_i_ff=zeros(Ndof_free,Ndof_free,Ne,Nw);
            for e=1:Ne
                for jj=1:Nw,
DeltaK_i_ff(:,:,e,jj)=DeltaK_i_Ext(dof_free,dof_free,e,jj); end
            end
            [Rchol,pchol]=chol(K0_ff); useChol=(pchol==0);
            minus_U_I=zeros(Ndof_free,Ne*Nw); col=0;
            for e=1:Ne
                for ii=1:Nw
                    col=col+1; rhs=DeltaK_i_ff(:,:,e,ii)*U0;
```

```
                    if useChol, minus_U_I(:,col)=Rchol\(Rchol'\rhs); else,
minus_U_I(:,col)=K0_ff\rhs; end
                end
            end
            tol_Gauss=1e-6; tol_COV_rel=1e-6; tol_COV_abs=1e-12;
            NG_list=[20 30 40 60 80 100 140 180]; nPassRequired=2;
            COV_U=NaN(1,nCase); NG_used=zeros(1,nCase);
            gauss_converged=false(1,nCase); gauss_summary=zeros(nCase,14);
            gauss_history=cell(nCase,1);
            for tt=1:nCase
                dx=dx_cases(tt); dy=dy_cases(tt);
                set(hObject,'String',sprintf('Dang tinh %d/%d...',tt,nCase));
drawnow;
                [COV_U(tt),gauss_info,case_history]=gauss_convergence_case(
...
                    Le,h,dx,dy,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid, ...
                    NG_list,tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,nPassRequired);
                NG_used(tt)=gauss_info.NG;
                gauss_converged(tt)=gauss_info.converged;
                gauss_summary(tt,:)=[tt dx_L_cases(tt) dy_L_cases(tt) dx dy
...
                    gauss_info.NG gauss_info.COV_last
gauss_info.err_Theta_rel ...
                    gauss_info.err_Theta_abs gauss_info.err_COV_rel ...
                    gauss_info.err_COV_abs gauss_info.pass_streak ...
                    double(gauss_info.converged) gauss_info.n_levels];
                gauss_history{tt}=[repmat([tt dx_L_cases(tt) dy_L_cases(tt)],
...
                    size(case_history,1),1) case_history];
                fprintf(['Cap %d/%d: dx/L=%.6g, dy/L=%.6g, NG=%d, ' ...
                    'COV_cuoi=%.10g, err_Theta=%.3e, err_COV=%.3e,
Dat=%d\n'], ...
                    tt,nCase,dx_L_cases(tt),dy_L_cases(tt),gauss_info.NG, ...
                    gauss_info.COV_last,gauss_info.err_Theta_rel, ...
                    gauss_info.err_COV_rel,gauss_info.converged);
            end
            equal_case=max(abs(dx_L_cases-
dy_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L_cases dy_L_cases])));
            dx_varies=(max(dx_L_cases)-
min(dx_L_cases))>100*eps*max(1,max(abs(dx_L_cases)));
            dy_varies=(max(dy_L_cases)-
min(dy_L_cases))>100*eps*max(1,max(abs(dy_L_cases)));
            axes(hAx); cla;
            if equal_case
                xplot=dx_L_cases; semilogx(hAx,xplot,COV_U,'b-
s','LineWidth',2, ...
                    'MarkerFaceColor','r','MarkerSize',6); xlabel(hAx,'d_x/L
= d_y/L');
            elseif dx_varies&&~dy_varies
                xplot=dx_L_cases; semilogx(hAx,xplot,COV_U,'b-
s','LineWidth',2, ...
                    'MarkerFaceColor','r','MarkerSize',6);
xlabel(hAx,'d_x/L');
            elseif ~dx_varies&&dy_varies
                xplot=dy_L_cases; semilogx(hAx,xplot,COV_U,'b-
s','LineWidth',2, ...
                    'MarkerFaceColor','r','MarkerSize',6);
xlabel(hAx,'d_y/L');
            else
                xplot=1:nCase; plot(hAx,xplot,COV_U,'b-s','LineWidth',2, ...
                    'MarkerFaceColor','r','MarkerSize',6); xlabel(hAx,'Chi so
truong hop');
```

```
            end
            grid(hAx,'on'); set(hAx,'XMinorGrid','on','YMinorGrid','on');
            ylabel(hAx,'He so bien dong COV');
            title(hAx,sprintf('COV chuyen vi - %d/%d cap dat hoi tu Gauss',
...
                sum(gauss_converged),nCase));
            valid_cov=COV_U(~isnan(COV_U)&~isinf(COV_U));
            if ~isempty(valid_cov)&&max(valid_cov)>0
                ymin=min(valid_cov); ymax=max(valid_cov);
                if ymax>ymin, ylim(hAx,[.8*ymin 1.2*ymax]); end
            end
            results.dx_L_cases=dx_L_cases; results.dy_L_cases=dy_L_cases;
            results.dx_cases=dx_cases; results.dy_cases=dy_cases;
            results.COV_U=COV_U; results.L=L; results.h=h; results.b=b;
            results.q=q; results.E0=E0; results.sigma_f=sigma_f;
            results.Ne=Ne; results.Nw=Nw; results.U0_mid=U0_mid;
            results.gauss_order=NG_used; results.gauss_tol=tol_Gauss;
            results.cov_rel_tol=tol_COV_rel; results.cov_abs_tol=tol_COV_abs;
            results.gauss_orders=NG_list;
results.gauss_pass_required=nPassRequired;
            results.gauss_converged=gauss_converged;
            results.gauss_summary=gauss_summary;
            results.gauss_history=vertcat(gauss_history{:});
            guidata(hFig,results); set(hBtnExcel,'Enable','on');
            if all(gauss_converged)
                set(hObject,'String','HOAN TAT (Bam de chay
lai)','Enable','on');
                msg=sprintf(['Tat ca %d cap (dx,dy) da dat kiem tra hoi
tu.\n' ...
                    'So diem Gauss su dung: %d den %d diem/tung mien con.\n'
...
                    'Hai tieu chi dat qua %d lan tang lien tiep.\n' ...
                    'Xuat Excel de xem HoiTuGauss va LichSuGauss.'], ...
                    nCase,min(NG_used),max(NG_used),nPassRequired);
                msgbox(msg,'Thong bao');
            else
                set(hObject,'String','CO CAP CHUA DAT','Enable','on');
                failed=find(~gauss_converged);
                msg=sprintf(['Co %d/%d cap chua dat sau toi da %d diem.\n'
...
                    'Chi so cap chua dat: %s\n' ...
                    'COV_U cua cac cap nay la NaN va khong ve tren do thi.\n'
...
                    'COV cuoi chi de chan doan trong HoiTuGauss va
LichSuGauss.'], ...
                    numel(failed),nCase,NG_list(end),mat2str(failed));
                warndlg(msg,'Chua dat hoi tu Gauss');
            end
        catch err
            set(hObject,'String','LOI! (Bam de thu lai)','Enable','on');
            errordlg(err.message,'Loi chuong trinh');
        end
        set(hFig,'Pointer','arrow');
    end
    function export_excel_callback(~,~)
        results=guidata(hFig);
        if isempty(results)||~isstruct(results)||~isfield(results,'COV_U')
            errordlg('Khong co du lieu de xuat!','Loi'); return;
        end
        [file,path]=uiputfile('*.xlsx','Luu ket qua SFEM');
        if isequal(file,0), return; end
        fullFileName=fullfile(path,file);
```

```
        try

headers1={'dx_L','dy_L','dx_m','dy_m','COV_U','NG_used','Converged'};

data1=[results.dx_L_cases(:),results.dy_L_cases(:),results.dx_cases(:), ...
                results.dy_cases(:),results.COV_U(:),results.gauss_order(:),
...
                double(results.gauss_converged(:))];
            sheet1_content=[headers1;num2cell(data1)];
            headers2={'ThongSo','GiaTri'};

param_names={'ChieuDaiDam_L';'ChieuCao_h';'BeRong_b';'TaiTrong_q'; ...
                'Modun_E0';'sigma_f_COV_E';'SoPhanTu_Ne';'SoBienTrongSo_Nw';
...
                'U0_mid';'GaussTolerance_CovTheta';'GaussTolerance_COV_Rel';
...

'GaussTolerance_COV_Abs';'RequiredConsecutivePasses';'MaxGaussOrder'; ...
                'NumberOfCases';'NumberOfConvergedCases'};
            param_vals=[results.L;results.h;results.b;results.q;results.E0;
...
                results.sigma_f;results.Ne;results.Nw;results.U0_mid; ...
                results.gauss_tol;results.cov_rel_tol;results.cov_abs_tol;
...
                results.gauss_pass_required;max(results.gauss_orders); ...
                numel(results.COV_U);sum(results.gauss_converged)];
            sheet2_content=[headers2;param_names num2cell(param_vals); ...
                {'GaussOrders',mat2str(results.gauss_orders)}];

headers3={'Case','dx_L','dy_L','dx_m','dy_m','NG_last','COV_last_diagnostic',
...

'RelErr_CovTheta','AbsErr_CovTheta','RelErr_COV','AbsErr_COV', ...
                'PassStreak','Converged','NumberOfOrders'};
            sheet3_content=[headers3;num2cell(results.gauss_summary)];

headers4={'Case','dx_L','dy_L','NG','COV_trial','RelErr_CovTheta', ...
                'AbsErr_CovTheta','RelErr_COV','AbsErr_COV','Pass_CovTheta',
...
                'Pass_COV','PassStreak'};
            sheet4_content=[headers4;num2cell(results.gauss_history)];
            xlswrite(fullFileName,sheet1_content,'KetQua');
            xlswrite(fullFileName,sheet2_content,'ThongSoDauVao');
            xlswrite(fullFileName,sheet3_content,'HoiTuGauss');
            xlswrite(fullFileName,sheet4_content,'LichSuGauss');
            msgbox(['Da luu thanh cong tai: ' fullFileName],'Thong bao');
        catch err
            errordlg(['Loi khi ghi file Excel: ' err.message],'Loi Xuat
File');
        end
    end
end
function [x,w]=gauss_legendre_rule(n)
if n<2||abs(n-round(n))>0, error('Bac Gauss n phai la so nguyen >= 2.'); end
n=round(n); k=1:n-1; beta=k./sqrt(4*k.^2-1);
T=diag(beta,1)+diag(beta,-1); [V,D]=eig(T);
[x,ind]=sort(diag(D)); V=V(:,ind); w=2*(V(1,:).^2)';
end
function I=expabs_moment_split(power1,power2,a1,b1,a2,b2,d_corr,Delta_x,g,w)
if d_corr<=0, error('Chieu dai tuong quan phai lon hon 0.'); end
if b1<=a1||b2<=a2, error('Can tich phan khong hop le.'); end
x1g=.5*(b1-a1)*g+.5*(a1+b1); w1g=.5*(b1-a1)*w; I=0;
```

```
for i=1:length(g)
    x1=x1g(i); sp=x1-Delta_x;
    if sp>a2&&sp<b2
        inner=expabs_inner(power2,x1,a2,sp,d_corr,Delta_x,g,w)+ ...
              expabs_inner(power2,x1,sp,b2,d_corr,Delta_x,g,w);
    else
        inner=expabs_inner(power2,x1,a2,b2,d_corr,Delta_x,g,w);
    end
    I=I+w1g(i)*x1^power1*inner;
end
end
function I2=expabs_inner(power2,x1,a,b,d_corr,Delta_x,g,w)
if b<=a, I2=0; return; end
x2g=.5*(b-a)*g+.5*(a+b); w2g=.5*(b-a)*w;
I2=sum(w2g.*(x2g.^power2).*exp(-abs(x2g-x1+Delta_x)/d_corr));
end
function [COV_U,info,history]=gauss_convergence_case( ...
    Le,h,dx,dy,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid, ...
    NG_list,tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,nPassRequired)
COV_U=NaN; pass_streak=0; converged=false;
history=NaN(numel(NG_list),9);
for kk=1:numel(NG_list)
    NG=NG_list(kk);
    [xi_G,w_G]=gauss_legendre_rule(NG);
    [COV_trial,Cov_Theta_lag]=gauss_response_at_order( ...
        Le,h,dx,dy,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid,xi_G,w_G);
    err_Theta_rel=NaN; err_Theta_abs=NaN;
    err_COV_rel=NaN; err_COV_abs=NaN;
    pass_Theta=false; pass_COV=false;
    if kk>1
        [err_Theta_rel,err_Theta_abs]=relative_difference( ...
            Cov_Theta_prev,Cov_Theta_lag);
        [err_COV_rel,err_COV_abs]=relative_difference(COV_prev,COV_trial);
        pass_Theta=(err_Theta_rel<=tol_Gauss);
        pass_COV=(err_COV_abs<=tol_COV_abs+tol_COV_rel*abs(COV_trial));
        if pass_Theta&&pass_COV
            pass_streak=pass_streak+1;
        else
            pass_streak=0;
        end
    end
    history(kk,:)=[NG COV_trial err_Theta_rel err_Theta_abs ...
        err_COV_rel err_COV_abs double(pass_Theta) double(pass_COV)
pass_streak];
    if pass_streak>=nPassRequired
        COV_U=COV_trial; converged=true;
        break;
    end
    Cov_Theta_prev=Cov_Theta_lag; COV_prev=COV_trial;
    drawnow;
end
history=history(1:kk,:);
info.NG=NG; info.COV_last=COV_trial; info.converged=converged;
info.err_Theta_rel=err_Theta_rel; info.err_Theta_abs=err_Theta_abs;
info.err_COV_rel=err_COV_rel; info.err_COV_abs=err_COV_abs;
info.pass_streak=pass_streak; info.n_levels=kk;
end
function [COV_U,Cov_Theta_lag]=gauss_response_at_order( ...
    Le,h,dx,dy,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid,xi_G,w_G)
lag_e=-(Ne-1):(Ne-1); Nlag=numel(lag_e);
I_y22=expabs_moment_split(2,2,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
Cov_Theta_lag=zeros(Nw,Nw,Nlag);
```

```
for ir=1:Nlag
    Delta_x=Le*lag_e(ir);
    for i1=1:Nw
        for i2=1:Nw
            I_x=expabs_moment_split(i1-1,i2-1,0,Le,0,Le,dx,Delta_x,xi_G,w_G);
            Cov_Theta_lag(i1,i2,ir)=sigma_f^2*I_x*I_y22;
        end
    end
end
if any(isnan(Cov_Theta_lag(:)))||any(isinf(Cov_Theta_lag(:)))
    error('Hiep phuong sai khong huu han tai dx=%.6g, dy=%.6g.',dx,dy);
end
if sigma_f>0&&max(abs(Cov_Theta_lag(:)))==0
    error('Tich phan bang 0 do do phan giai hoac tran duoi tai dx=%.6g,
dy=%.6g.',dx,dy);
end
Cov_Theta=zeros(Ne*Nw,Ne*Nw);
for e1=1:Ne
    rows=(e1-1)*Nw+(1:Nw);
    for e2=1:Ne
        cols=(e2-1)*Nw+(1:Nw); ir=(e2-e1)+Ne;
        Cov_Theta(rows,cols)=Cov_Theta_lag(:,:,ir);
    end
end
Cov_Theta=.5*(Cov_Theta+Cov_Theta');
minus_U_I_CovTheta=minus_U_I*Cov_Theta;
Var_U=sum(minus_U_I.*minus_U_I_CovTheta,2);
Var_U_mid=Var_U(idx_mid); scale_Var_U=max(max(abs(Var_U)),eps);
if Var_U_mid<0&&abs(Var_U_mid)<=1e-10*scale_Var_U
    Var_U_mid=0;
elseif Var_U_mid<0
    error('Phuong sai am %.6e tai dx=%.6g, dy=%.6g.',Var_U_mid,dx,dy);
end
COV_U=sqrt(Var_U_mid)/abs(U0_mid);
if isnan(COV_U)||isinf(COV_U)||(sigma_f>0&&COV_U==0)
    error('COV khong hop le tai dx=%.6g, dy=%.6g.',dx,dy);
end
end
function [rel_err,abs_err]=relative_difference(A,B)
abs_err=max(abs(A(:)-B(:))); scale=max(abs(B(:)));
if scale>0
    rel_err=abs_err/scale;
elseif abs_err==0
    rel_err=0;
else
    rel_err=Inf;
end
end
```

b. Chương trình phân tích tĩnh ngẫu nhiên ba chiều:

```
function SFEM_GUI_TINH_3D
clc; close all;
hFig=figure('Name','SFEM 3D Analysis - Split Gauss','NumberTitle','off', ...
    'Position',[100 100 1100 650],'Color',[.95 .95 .95],'MenuBar','none','Res
    ize','on');
hPanel=uipanel('Parent',hFig,'Title','THONG SO DAU VAO','FontSize',10, ...
    'FontWeight','bold','Position',[.01 .02 .27 .96],'BackgroundColor',[.95 .
    95 .95]);
add_input(hPanel,'Chieu dai nhip L (m):','5','in_L',.93);
add_input(hPanel,'Be rong b (m):','0.25','in_b',.85);
add_input(hPanel,'Chieu cao h (m):','0.4','in_h',.77);
add_input(hPanel,'Tai trong q (N/m):','10000','in_q',.69);
```

```
add_input(hPanel,'Modun E0 (Pa):','30e9','in_E0',.61);
add_input(hPanel,'COV_E = sigma_f:','0.05','in_sigma_f',.53);
add_input(hPanel,'So phan tu Ne:','40','in_Ne',.45);
add_vector_input(hPanel,'Ty le dx/L:','[0.01 0.05 0.1 0.5 1 5 20 100]','in_dx
',.37);
add_vector_input(hPanel,'Ty le dy/L:','[0.01 0.05 0.1 0.5 1 5 20 100]','in_dy
',.27);
add_vector_input(hPanel,'Ty le dz/L:','[0.01 0.05 0.1 0.5 1 5 20 100]','in_dz
',.17);
hBtnRun=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','TINH TOAN',
...
    'Units','normalized','Position',[.05 .035 .43 .075],'FontSize',10,'FontWe
    ight','bold', ...
    'BackgroundColor',[0 .5 0],'ForegroundColor','white','Callback',@run_simu
    lation);
hBtnExcel=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','XUAT EXCEL
', ...
    'Units','normalized','Position',[.52 .035 .43 .075],'FontSize',10,'FontWe
    ight','bold', ...
    'BackgroundColor',[.2 .4 .8],'ForegroundColor','white','Enable','off', ..
    .
    'Callback',@export_excel_callback);
hAx=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.34 .15 .62 .75],'Box
','on');
grid(hAx,'on'); xlabel(hAx,'Ty le chieu dai tuong quan');
ylabel(hAx,'He so bien dong COV(U(L/2))'); title(hAx,'Ket qua phan tich tinh
3D');
    function add_input(parent,label,val,tag,y)
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',label,'Units','norm
        alized', ...
            'Position',[.05 y .9 .025],'HorizontalAlignment','left','Backgrou
            ndColor',[.95 .95 .95]);
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',val,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y-.045 .9 .04],'Tag',tag,'BackgroundColor','white
            ');
    end
    function add_vector_input(parent,label,val,tag,y)
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',label,'Units','norm
        alized', ...
            'Position',[.05 y .9 .025],'HorizontalAlignment','left','Backgrou
            ndColor',[.95 .95 .95]);
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',val,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y-.055 .9 .05],'Max',2,'Tag',tag,'BackgroundColor
            ','white');
    end
    function run_simulation(hObject,~)
        set(hFig,'Pointer','watch'); set(hObject,'String','Dang tinh...','Ena
        ble','off');
        set(hBtnExcel,'Enable','off'); drawnow;
        try
            L=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_L'),'String'));
            b=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_b'),'String'));
            h=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_h'),'String'));
            q=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_q'),'String'));
            E0=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_E0'),'String'));
            sigma_f=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_sigma_f'),'String')
            );
            Ne=str2double(get(findobj(hFig,'Tag','in_Ne'),'String'));
            dx_L_input=str2num(get(findobj(hFig,'Tag','in_dx'),'String'));
            dy_L_input=str2num(get(findobj(hFig,'Tag','in_dy'),'String'));
```

```
dz_L_input=str2num(get(findobj(hFig,'Tag','in_dz'),'String'));
vals=[L b h q E0 sigma_f Ne];
if any(isnan(vals))||any(isinf(vals)), error('Du lieu dau vao pha
i la cac so huu han.'); end
if L<=0||b<=0||h<=0||E0<=0, error('L, b, h va E0 phai lon hon 0.'
); end
if sigma_f<0, error('sigma_f = COV_E phai khong am.'); end
if Ne<2||abs(Ne-round(Ne))>0, error('So phan tu Ne phai la so ngu
yen >= 2.'); end
Ne=round(Ne);
if mod(Ne,2)~=0, error('So phan tu Ne phai la so chan de co nut g
iua nhip.'); end
if isempty(dx_L_input)||isempty(dy_L_input)||isempty(dz_L_input),
error('Phai nhap day du dx/L, dy/L va dz/L.'); end
if ~isreal(dx_L_input)||any(isnan(dx_L_input(:)))||any(isinf(dx_L
_input(:)))||any(dx_L_input(:)<=0), error('dx/L phai gom cac so t
huc duong huu han.'); end
if ~isreal(dy_L_input)||any(isnan(dy_L_input(:)))||any(isinf(dy_L
_input(:)))||any(dy_L_input(:)<=0), error('dy/L phai gom cac so t
huc duong huu han.'); end
if ~isreal(dz_L_input)||any(isnan(dz_L_input(:)))||any(isinf(dz_L
_input(:)))||any(dz_L_input(:)<=0), error('dz/L phai gom cac so t
huc duong huu han.'); end
dx_L_input=dx_L_input(:).'; dy_L_input=dy_L_input(:).'; dz_L_inpu
t=dz_L_input(:).';
nCase=max([numel(dx_L_input) numel(dy_L_input) numel(dz_L_input)]
);
if ~((numel(dx_L_input)==1)||(numel(dx_L_input)==nCase))|| ...
   ~((numel(dy_L_input)==1)||(numel(dy_L_input)==nCase))|| ...
   ~((numel(dz_L_input)==1)||(numel(dz_L_input)==nCase))
    error('Moi dau vao dx/L, dy/L, dz/L phai la mot so hoac vecto
    r co cung so phan tu.');
end
if numel(dx_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input*ones(1,nCase); els
e, dx_L_cases=dx_L_input; end
if numel(dy_L_input)==1, dy_L_cases=dy_L_input*ones(1,nCase); els
e, dy_L_cases=dy_L_input; end
if numel(dz_L_input)==1, dz_L_cases=dz_L_input*ones(1,nCase); els
e, dz_L_cases=dz_L_input; end
dx_cases=dx_L_cases*L; dy_cases=dy_L_cases*L; dz_cases=dz_L_cases
*L;
Nw=3; I=b*h^3/12; Le=L/Ne; Ndof=2*(Ne+1); K0=zeros(Ndof,Ndof);
K0_e=E0*I*[12/Le^3 6/Le^2 -12/Le^3 6/Le^2; ...
         6/Le^2 4/Le -6/Le^2 2/Le; ...
        -12/Le^3 -6/Le^2 12/Le^3 -6/Le^2; ...
         6/Le^2 2/Le -6/Le^2 4/Le];
for e=1:Ne
    id=(2*e-1):(2*e+2); K0(id,id)=K0(id,id)+K0_e;
end
P=zeros(Ndof,1); P_e=q*Le/2*[-1;-Le/6;-1;Le/6];
for e=1:Ne
    id=(2*e-1):(2*e+2); P(id)=P(id)+P_e;
end
dof_fixed=[1 Ndof-1]; dof_free=setdiff(1:Ndof,dof_fixed);
K0_ff=K0(dof_free,dof_free); P_f=P(dof_free); U0=K0_ff\P_f;
node_mid=Ne/2+1; global_dof_mid=2*node_mid-1;
idx_mid=find(dof_free==global_dof_mid,1);
if isempty(idx_mid), error('Khong tim thay bac tu do chuyen vi ta
i giua nhip.'); end
U0_mid=U0(idx_mid);
if abs(U0_mid)<=eps, error('Chuyen vi tat dinh tai giua nhip qua
nho de tinh COV.'); end
```

```
DeltaK_i_Ext=zeros(Ndof,Ndof,Ne,Nw); coef_DeltaK=E0/Le^6;
DeltaK1_e=coef_DeltaK*[36*Le^2 24*Le^3 -36*Le^2 12*Le^3; ...
      24*Le^3 16*Le^4 -24*Le^3 8*Le^4; ...
     -36*Le^2 -24*Le^3 36*Le^2 -12*Le^3; ...
      12*Le^3 8*Le^4 -12*Le^3 4*Le^4];
DeltaK2_e=coef_DeltaK*[-144*Le -84*Le^2 144*Le -60*Le^2; ...
      -84*Le^2 -48*Le^3 84*Le^2 -36*Le^3; ...
       144*Le 84*Le^2 -144*Le 60*Le^2; ...
      -60*Le^2 -36*Le^3 60*Le^2 -24*Le^3];
DeltaK3_e=coef_DeltaK*[144 72*Le -144 72*Le; ...
      72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2; ...
     -144 -72*Le 144 -72*Le; ...
      72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2];
for e=1:Ne
    id=(2*e-1):(2*e+2);
    DeltaK_i_Ext(id,id,e,1)=DeltaK1_e; DeltaK_i_Ext(id,id,e,2)=De
    ltaK2_e; DeltaK_i_Ext(id,id,e,3)=DeltaK3_e;
end
Ndof_free=numel(dof_free); DeltaK_i_ff=zeros(Ndof_free,Ndof_free,
Ne,Nw);
for e=1:Ne
    for ii=1:Nw, DeltaK_i_ff(:,:,e,ii)=DeltaK_i_Ext(dof_free,dof_
    free,e,ii); end
end
[Rchol,pchol]=chol(K0_ff); useChol=(pchol==0);
minus_U_I=zeros(Ndof_free,Ne*Nw); kcol=0;
for e=1:Ne
    for ii=1:Nw
        kcol=kcol+1; rhs=DeltaK_i_ff(:,:,e,ii)*U0;
        if useChol, minus_U_I(:,kcol)=Rchol\(Rchol'\rhs); else, m
        inus_U_I(:,kcol)=K0_ff\rhs; end
    end
end
tol_Gauss=1e-6; tol_COV_rel=1e-6; tol_COV_abs=1e-12;
NG_list=[20 30 40 60 80 100 140 180]; nPassRequired=2;
COV_U=NaN(1,nCase); NG_used=zeros(1,nCase);
gauss_converged=false(1,nCase); gauss_summary=NaN(nCase,19);
gauss_history=cell(nCase,1);
for tt=1:nCase
    dx=dx_cases(tt); dy=dy_cases(tt); dz=dz_cases(tt);
    set(hObject,'String',sprintf('Dang tinh %d/%d...',tt,nCase));
    drawnow;
    [COV_U(tt),gauss_info,case_history]=gauss_convergence_case_3d
    ( ...
        Le,h,b,dx,dy,dz,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid, .
        ..
        NG_list,tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,nPassRequired);
    NG_used(tt)=gauss_info.NG;
    gauss_converged(tt)=gauss_info.converged;
    gauss_summary(tt,:)=[tt dx_L_cases(tt) dy_L_cases(tt) dz_L_ca
    ses(tt) ...
        dx dy dz gauss_info.NG gauss_info.COV_last ...
        gauss_info.err_Ix_rel gauss_info.err_Iy_rel gauss_info.er
        r_Iz_rel ...
        gauss_info.err_Theta_rel gauss_info.err_Theta_abs ...
        gauss_info.err_COV_rel gauss_info.err_COV_abs ...
        gauss_info.pass_streak double(gauss_info.converged) gauss
        _info.n_levels];
    gauss_history{tt}=[repmat([tt dx_L_cases(tt) dy_L_cases(tt) d
    z_L_cases(tt)], ...
        size(case_history,1),1) case_history];
    fprintf(['Bo %d/%d: dx/L=%.6g, dy/L=%.6g, dz/L=%.6g, NG=%d, '
```

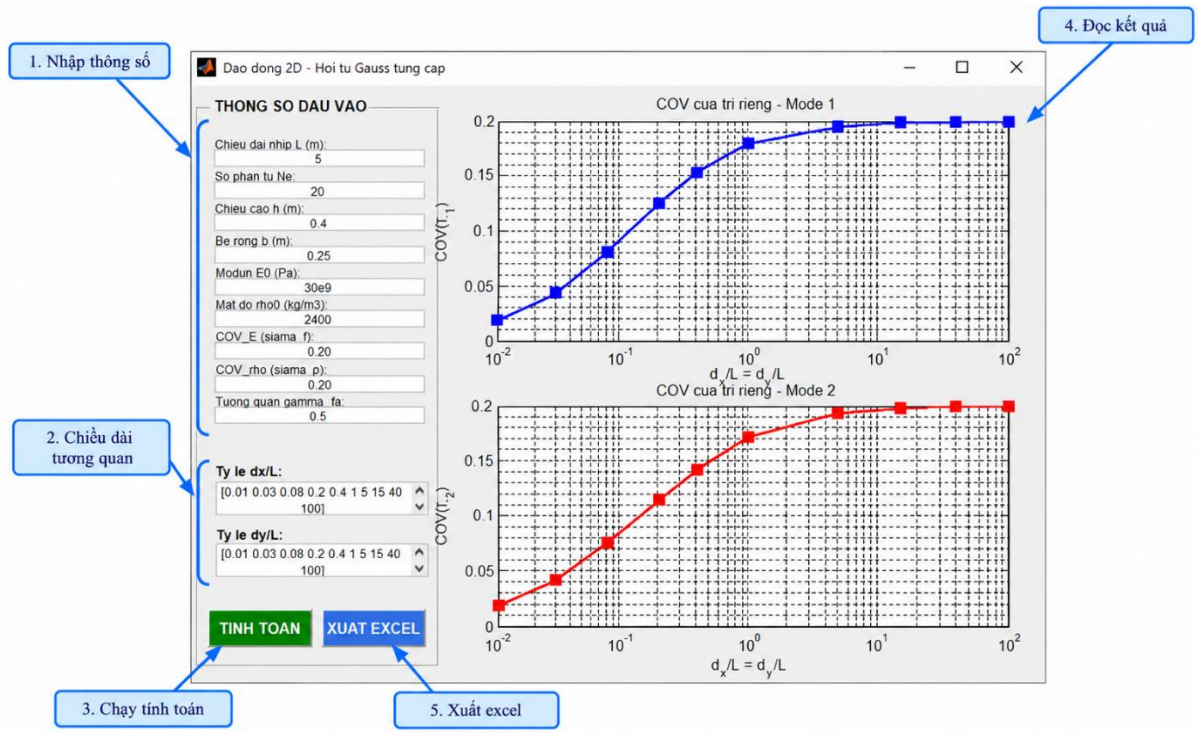
```
    ...
        'COV_cuoi=%.10g, err_Gauss=%.3e, err_COV=%.3e, Dat=%d\n']
        , ...
        tt,nCase,dx_L_cases(tt),dy_L_cases(tt),dz_L_cases(tt),gau
        ss_info.NG, ...
        gauss_info.COV_last,max([gauss_info.err_Ix_rel gauss_info
        .err_Iy_rel ...
        gauss_info.err_Iz_rel gauss_info.err_Theta_rel]), ...
        gauss_info.err_COV_rel,gauss_info.converged);
end
eqXY=max(abs(dx_L_cases-dy_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L
_cases dy_L_cases])));
eqXZ=max(abs(dx_L_cases-dz_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L
_cases dz_L_cases])));
vx=(max(dx_L_cases)-min(dx_L_cases))>100*eps*max(1,max(abs(dx_L_c
ases)));
vy=(max(dy_L_cases)-min(dy_L_cases))>100*eps*max(1,max(abs(dy_L_c
ases)));
vz=(max(dz_L_cases)-min(dz_L_cases))>100*eps*max(1,max(abs(dz_L_c
ases)));
axes(hAx); cla;
if eqXY&&eqXZ
    semilogx(hAx,dx_L_cases,COV_U,'b-s','LineWidth',1.5,'MarkerFa
    ceColor','c','MarkerSize',6);
    xlabel(hAx,'d_x/L = d_y/L = d_z/L');
elseif vx&&~vy&&~vz
    semilogx(hAx,dx_L_cases,COV_U,'b-s','LineWidth',1.5,'MarkerFa
    ceColor','c','MarkerSize',6);
    xlabel(hAx,'d_x/L');
elseif ~vx&&vy&&~vz
    semilogx(hAx,dy_L_cases,COV_U,'b-s','LineWidth',1.5,'MarkerFa
    ceColor','c','MarkerSize',6);
    xlabel(hAx,'d_y/L');
elseif ~vx&&~vy&&vz
    semilogx(hAx,dz_L_cases,COV_U,'b-s','LineWidth',1.5,'MarkerFa
    ceColor','c','MarkerSize',6);
    xlabel(hAx,'d_z/L');
else
    plot(hAx,1:nCase,COV_U,'b-s','LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor
    ','c','MarkerSize',6);
    xlabel(hAx,'Chi so truong hop');
end
grid(hAx,'on'); set(hAx,'XMinorGrid','on','YMinorGrid','on');
ylabel(hAx,'He so bien dong COV(U(L/2))');
title(hAx,sprintf('COV chuyen vi 3D - %d/%d bo dat hoi tu Gauss',
...
    sum(gauss_converged),nCase));
valid_cov=COV_U(~isnan(COV_U)&~isinf(COV_U));
if ~isempty(valid_cov)&&max(valid_cov)>0
    ymin=min(valid_cov); ymax=max(valid_cov);
    if ymax>ymin, ylim(hAx,[.8*ymin 1.2*ymax]); end
end
results.dx_L_cases=dx_L_cases; results.dy_L_cases=dy_L_cases;
results.dz_L_cases=dz_L_cases;
results.dx_cases=dx_cases; results.dy_cases=dy_cases; results.dz_
cases=dz_cases;
results.COV_U=COV_U; results.L=L; results.b=b; results.h=h;
results.q=q; results.E0=E0; results.sigma_f=sigma_f;
results.Ne=Ne; results.Nw=Nw; results.U0_mid=U0_mid;
results.gauss_order=NG_used; results.gauss_tol=tol_Gauss;
results.cov_rel_tol=tol_COV_rel; results.cov_abs_tol=tol_COV_abs;
results.gauss_orders=NG_list; results.gauss_pass_required=nPassRe
```

```
        quired;
        results.gauss_converged=gauss_converged;
        results.gauss_summary=gauss_summary;
        results.gauss_history=vertcat(gauss_history{:});
        guidata(hFig,results); set(hBtnExcel,'Enable','on');
        if all(gauss_converged)
            set(hObject,'String','HOAN TAT','Enable','on');
            msg=sprintf(['Tat ca %d bo (dx,dy,dz) da dat kiem tra hoi tu.
            \n' ...
                'So diem Gauss: %d den %d diem/tung mien con.\n' ...
                'Tich phan va COV dat qua %d lan tang lien tiep.\n' ...
                'Xuat Excel de xem HoiTuGauss va LichSuGauss.'], ...
                nCase,min(NG_used),max(NG_used),nPassRequired);
            msgbox(msg,'Thong bao');
        else
            set(hObject,'String','CO BO CHUA DAT','Enable','on');
            failed=find(~gauss_converged);
            msg=sprintf(['Co %d/%d bo chua dat sau toi da %d diem.\n' ...
                'Chi so bo chua dat: %s\n' ...
                'COV_U cua cac bo nay la NaN va khong ve tren do thi.\n'
                ...
                'COV cuoi chi de chan doan trong HoiTuGauss va LichSuGaus
                s.'], ...
                numel(failed),nCase,NG_list(end),mat2str(failed));
            warndlg(msg,'Chua dat hoi tu Gauss');
        end
    catch err
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on');
        errordlg(err.message,'Loi Chuong Trinh');
    end
    set(hFig,'Pointer','arrow');
end
function export_excel_callback(~,~)
    results=guidata(hFig);
    if isempty(results)||~isstruct(results)||~isfield(results,'COV_U')
        errordlg('Chua co du lieu!','Loi'); return;
    end
    [file,path]=uiputfile('*.xlsx','Luu Ket Qua');
    if isequal(file,0), return; end
    fn=fullfile(path,file);
    try
        H1={'dx_L','dy_L','dz_L','dx_m','dy_m','dz_m','COV_U','NG_used','
        Converged'};
        D=[results.dx_L_cases(:) results.dy_L_cases(:) results.dz_L_cases
        (:) ...
            results.dx_cases(:) results.dy_cases(:) results.dz_cases(:) .
            ..
            results.COV_U(:) results.gauss_order(:) double(results.gauss_
            converged(:))];
        S1=[H1;num2cell(D)];
        H2={'ThongSo','GiaTri'};
        N={'L';'b';'h';'q';'E0';'sigma_f_COV_E';'Ne';'Nw';'U0_mid'; ...
            'GaussTolerance_Integrals';'GaussTolerance_COV_Rel'; ...
            'GaussTolerance_COV_Abs';'RequiredConsecutivePasses';'MaxGaus
            sOrder'; ...
            'NumberOfCases';'NumberOfConvergedCases'};
        V=[results.L;results.b;results.h;results.q;results.E0;results.sig
        ma_f; ...
            results.Ne;results.Nw;results.U0_mid;results.gauss_tol; ...
            results.cov_rel_tol;results.cov_abs_tol;results.gauss_pass_re
            quired; ...
            max(results.gauss_orders);numel(results.COV_U);sum(results.ga
```

```
            uss_converged)];
        S2=[H2;N num2cell(V);{'GaussOrders',mat2str(results.gauss_orders)
        }];
        H3={'Case','dx_L','dy_L','dz_L','dx_m','dy_m','dz_m','NG_last', .
        ..
            'COV_last_diagnostic','RelErr_Ix','RelErr_Iy22','RelErr_Iz00'
            , ...
            'RelErr_CovTheta','AbsErr_CovTheta','RelErr_COV','AbsErr_COV'
            , ...
            'PassStreak','Converged','NumberOfOrders'};
        S3=[H3;num2cell(results.gauss_summary)];
        H4={'Case','dx_L','dy_L','dz_L','NG','COV_trial','RelErr_Ix', ...
            'RelErr_Iy22','RelErr_Iz00','RelErr_CovTheta','AbsErr_CovThet
            a', ...
            'RelErr_COV','AbsErr_COV','Pass_Integrals','Pass_COV','PassSt
            reak'};
        S4=[H4;num2cell(results.gauss_history)];
        [ok,msg]=xlswrite(fn,S1,'KetQua');
        if ~ok, error('Khong ghi duoc KetQua: %s',msg.message); end
        [ok,msg]=xlswrite(fn,S2,'ThongSoDauVao');
        if ~ok, error('Khong ghi duoc ThongSoDauVao: %s',msg.message); en
        d
        [ok,msg]=xlswrite(fn,S3,'HoiTuGauss');
        if ~ok, error('Khong ghi duoc HoiTuGauss: %s',msg.message); end
        [ok,msg]=xlswrite(fn,S4,'LichSuGauss');
        if ~ok, error('Khong ghi duoc LichSuGauss: %s',msg.message); end
        msgbox(['Luu thanh cong: ' fn],'Thong bao');
    catch err
        errordlg(['Loi ghi file Excel: ' err.message],'Loi Xuat File');
    end
end
end
function [x,w]=gauss_legendre_rule(n)
if n<2||abs(n-round(n))>0, error('Bac Gauss n phai la so nguyen >= 2.'); end
n=round(n); k=1:n-1; beta=k./sqrt(4*k.^2-1);
T=diag(beta,1)+diag(beta,-1); [V,D]=eig(T);
[x,ind]=sort(diag(D)); V=V(:,ind); w=2*(V(1,:).^2)';
end
function I=expabs_moment_split(power1,power2,a1,b1,a2,b2,d_corr,Delta_x,g,w)
if d_corr<=0, error('Chieu dai tuong quan phai lon hon 0.'); end
if b1<=a1||b2<=a2, error('Can tich phan khong hop le.'); end
x1g=.5*(b1-a1)*g+.5*(a1+b1); w1g=.5*(b1-a1)*w; I=0;
for i=1:length(g)
    x1=x1g(i); sp=x1-Delta_x;
    if sp>a2&&sp<b2
        inner=expabs_inner(power2,x1,a2,sp,d_corr,Delta_x,g,w)+ ...
              expabs_inner(power2,x1,sp,b2,d_corr,Delta_x,g,w);
    else
        inner=expabs_inner(power2,x1,a2,b2,d_corr,Delta_x,g,w);
    end
    I=I+w1g(i)*x1^power1*inner;
end
end
function I2=expabs_inner(power2,x1,a,b,d_corr,Delta_x,g,w)
if b<=a, I2=0; return; end
x2g=.5*(b-a)*g+.5*(a+b); w2g=.5*(b-a)*w;
I2=sum(w2g.*(x2g.^power2).*exp(-abs(x2g-x1+Delta_x)/d_corr));
end
function [COV_U,info,history]=gauss_convergence_case_3d( ...
    Le,h,b,dx,dy,dz,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid, ...
    NG_list,tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,nPassRequired)
COV_U=NaN; pass_streak=0; converged=false;
```

```
history=NaN(numel(NG_list),12);
for kk=1:numel(NG_list)
    NG=NG_list(kk);
    [xi_G,w_G]=gauss_legendre_rule(NG);
    [COV_trial,Cov_Theta_lag,I_x_lag,I_y22,I_z00]=gauss_response_at_order_3d(
    ...
        Le,h,b,dx,dy,dz,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid,xi_G,w_G);
    err_Ix_rel=NaN; err_Iy_rel=NaN; err_Iz_rel=NaN;
    err_Theta_rel=NaN; err_Theta_abs=NaN;
    err_COV_rel=NaN; err_COV_abs=NaN;
    pass_integrals=false; pass_COV=false;
    if kk>1
        err_Ix_rel=relative_difference(I_x_prev,I_x_lag);
        err_Iy_rel=relative_difference(I_y_prev,I_y22);
        err_Iz_rel=relative_difference(I_z_prev,I_z00);
        [err_Theta_rel,err_Theta_abs]=relative_difference(Cov_Theta_prev,Cov_
        Theta_lag);
        [err_COV_rel,err_COV_abs]=relative_difference(COV_prev,COV_trial);
        pass_integrals=all([err_Ix_rel err_Iy_rel err_Iz_rel err_Theta_rel]<=
        tol_Gauss);
        pass_COV=(err_COV_abs<=tol_COV_abs+tol_COV_rel*abs(COV_trial));
        if pass_integrals&&pass_COV
            pass_streak=pass_streak+1;
        else
            pass_streak=0;
        end
    end
    history(kk,:)=[NG COV_trial err_Ix_rel err_Iy_rel err_Iz_rel ...
        err_Theta_rel err_Theta_abs err_COV_rel err_COV_abs ...
        double(pass_integrals) double(pass_COV) pass_streak];
    if pass_streak>=nPassRequired
        COV_U=COV_trial; converged=true;
        break;
    end
    I_x_prev=I_x_lag; I_y_prev=I_y22; I_z_prev=I_z00;
    Cov_Theta_prev=Cov_Theta_lag; COV_prev=COV_trial;
    drawnow;
end
history=history(1:kk,:);
info.NG=NG; info.COV_last=COV_trial; info.converged=converged;
info.err_Ix_rel=err_Ix_rel; info.err_Iy_rel=err_Iy_rel; info.err_Iz_rel=err_I
z_rel;
info.err_Theta_rel=err_Theta_rel; info.err_Theta_abs=err_Theta_abs;
info.err_COV_rel=err_COV_rel; info.err_COV_abs=err_COV_abs;
info.pass_streak=pass_streak; info.n_levels=kk;
end
function [COV_U,Cov_Theta_lag,I_x_lag,I_y22,I_z00]=gauss_response_at_order_3d
( ...
    Le,h,b,dx,dy,dz,Ne,Nw,sigma_f,minus_U_I,idx_mid,U0_mid,xi_G,w_G)
lag_e=-(Ne-1):(Ne-1); Nlag=numel(lag_e);
I_y22=expabs_moment_split(2,2,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_z00=expabs_moment_split(0,0,-b/2,b/2,-b/2,b/2,dz,0,xi_G,w_G);
if isnan(I_y22)||isinf(I_y22)||I_y22<=0||isnan(I_z00)||isinf(I_z00)||I_z00<=0
    error('Tich phan tiet dien khong hop le tai dy=%.6g, dz=%.6g.',dy,dz);
end
I_x_lag=zeros(Nw,Nw,Nlag); Cov_Theta_lag=zeros(Nw,Nw,Nlag);
for ir=1:Nlag
    Delta_x=Le*lag_e(ir);
    for i1=1:Nw
        for i2=1:Nw
            I_x=expabs_moment_split(i1-1,i2-1,0,Le,0,Le,dx,Delta_x,xi_G,w_G);
            I_x_lag(i1,i2,ir)=I_x;
```

```
            Cov_Theta_lag(i1,i2,ir)=sigma_f^2*I_x*I_y22*I_z00;
        end
    end
end
if any(isnan(I_x_lag(:)))||any(isinf(I_x_lag(:)))||I_x_lag(1,1,Ne)<=0
    error('Tich phan theo x khong hop le tai dx=%.6g.',dx);
end
if any(isnan(Cov_Theta_lag(:)))||any(isinf(Cov_Theta_lag(:)))
    error('Hiep phuong sai khong huu han tai dx=%.6g, dy=%.6g, dz=%.6g.',dx,d
    y,dz);
end
if sigma_f>0&&max(abs(Cov_Theta_lag(:)))==0
    error('Tich phan bang 0 do do phan giai hoac tran duoi tai dx=%.6g, dy=%.
    6g, dz=%.6g.',dx,dy,dz);
end
Cov_Theta=zeros(Ne*Nw,Ne*Nw);
for e1=1:Ne
    rows=(e1-1)*Nw+(1:Nw);
    for e2=1:Ne
        cols=(e2-1)*Nw+(1:Nw); ir=(e2-e1)+Ne;
        Cov_Theta(rows,cols)=Cov_Theta_lag(:,:,ir);
    end
end
Cov_Theta=.5*(Cov_Theta+Cov_Theta');
minus_U_I_CovTheta=minus_U_I*Cov_Theta;
Var_U=sum(minus_U_I.*minus_U_I_CovTheta,2);
Var_U_mid=Var_U(idx_mid); scale_Var_U=max(max(abs(Var_U)),eps);
if Var_U_mid<0&&abs(Var_U_mid)<=1e-10*scale_Var_U
    Var_U_mid=0;
elseif Var_U_mid<0
    error('Phuong sai am %.6e tai dx=%.6g, dy=%.6g, dz=%.6g.',Var_U_mid,dx,dy
    ,dz);
end
COV_U=sqrt(Var_U_mid)/abs(U0_mid);
if isnan(COV_U)||isinf(COV_U)||(sigma_f>0&&COV_U==0)
    error('COV khong hop le tai dx=%.6g, dy=%.6g, dz=%.6g.',dx,dy,dz);
end
end
function [rel_err,abs_err]=relative_difference(A,B)
abs_err=max(abs(A(:)-B(:))); scale=max(abs(B(:)));
if scale>0
    rel_err=abs_err/scale;
elseif abs_err==0
    rel_err=0;
else
    rel_err=Inf;
end
end
```



Hình D.2. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính

B.1. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình được xây dựng với giao diện người dùng đồ họa (GUI) trong môi trường MATLAB và tương thích với MATLAB R2012b trở lên. Hai chương trình phân tích đặc trưng động lực học với trường ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều được lưu thành các tệp hàm MATLAB độc lập. Trình tự sử dụng như sau:

1. Khởi động chương trình: Mở MATLAB, tạo các tệp hàm MATLAB (*.m), sao chép mã nguồn tương ứng tại Mục B.4 và lưu lần lượt với tên SFEM_GUI_DAO_DONG_2D.m và SFEM_GUI_DAO_DONG_3D.m
2. Mở giao diện: Trong cửa sổ Command Window, nhập tên chương trình cần thực hiện và nhấn Enter. Giao diện nhập dữ liệu và hiển thị kết quả sẽ được mở.
3. Nhập dữ liệu: Tại khung "THÔNG SỐ ĐẦU VÀO", người dùng nhập các thông số hình học, vật liệu và thống kê của bài toán, bao gồm chiều dài dầm, kích thước tiết diện, mô đun đàn hồi trung bình E_0, khối lượng riêng trung bình ρ_0, các hệ số biến thiên COV_E, $COV\rho$ và hệ số tương quan chéo γ giữa hai trường ngẫu nhiên E và ρ, chiều dài tương quan.
4. Thực hiện tính toán: Nhấn nút "TÍNH TOÁN". Chương trình xác định hệ số biến thiên của các trị riêng bằng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên.
5. Quan sát kết quả: Sau khi tính toán hoàn tất, hai đồ thị biểu diễn sự thay đổi của hệ số biến thiên của trị riêng thứ nhất và thứ hai, COV(λ1) và COV(λ2), theo các tỷ số chiều dài tương quan được hiển thị trực tiếp trên giao diện.
6. Lưu kết quả: Nhấn nút "XUẤT EXCEL" để lưu các thông số đầu vào, chiều dài tương quan, trị riêng tất định và các kết quả thống kê dưới dạng tệp Microsoft Excel (*.xlsx), phục vụ cho việc tổng hợp, kiểm tra và xử lý số liệu.

B.2. Tệp dữ liệu đầu vào (Input Data)

Các tham số đầu vào được nhập trực tiếp trên giao diện GUI và được chia thành ba nhóm chính:

- Nhóm hình học và lưới:
  - ✓ **Chieu dai nhip L(m):** Chiều dài nhịp dầm, ví dụ L=5m.
  - ✓ **So phan tu N_e:** Số phần tử hữu hạn chia theo chiều dài dầm, ví dụ N_e=40.
  - ✓ **Chieu cao h (m):** Chiều cao tiết diện chữ nhật, ví dụ h=0.4 m.
  - ✓ **Be rong b (m):** Bề rộng tiết diện chữ nhật, ví dụ b=0.25m.
- **Nhóm thông số vật liệu trung bình:**
  - ✓ **Modun E_0 (Pa):** Giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi, ví dụ E_0=30×10^9 Pa.
  - ✓ **Mat do ρ_0 (kg/m3):** Giá trị kỳ vọng của khối lượng riêng, ví dụ ρ_0=2400kg/m^3.

- **Nhóm thông số trường ngẫu nhiên:**
  - ✓ **COV$_E$ (sigma1):** Hệ số biến thiên của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi E.
  - ✓ **COVρ (sigma2):** Hệ số biến thiên của trường ngẫu nhiên khối lượng riêng ρ.
  - ✓ **Tuong quan Gamma:** Hệ số tương quan chéo γ giữa hai trường ngẫu nhiên E và ρ.
  - ✓ **Ty le d$_x$/L:** Vector các tỷ số chiều dài tương quan theo phương dọc trục *x*.
  - ✓ **Ty le dy/L:** Vector các tỷ số chiều dài tương quan theo phương chiều cao tiết diện *y*.
  - ✓ **Ty le dz/L:** Đối với mô hình 3D, vector các tỷ số chiều dài tương quan theo phương bề rộng tiết diện *z*.

B.3. Tệp dữ liệu đầu ra (Output Data)

Chương trình xuất tệp Excel gồm bốn trang tính:

- **"KetQua":** Kết quả COV của đáp ứng và trạng thái hội tụ.
- **"ThongSoDauVao":** Thông số đầu vào, đại lượng tất định tham chiếu và thiết lập hội tụ.
- **"HoiTuGauss":** Tổng hợp kết quả kiểm tra hội tụ theo số điểm Gauss.
- **"LichSuGauss":** Chi tiết quá trình kiểm tra qua từng mức tăng số điểm Gauss.

B.4. Bản in câu lệnh chương trình (Source Code)

a. Chương trình phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

```
function SFEM_GUI_DAO_DONG_2D
clc; close all;
hFig=figure('Name','Dao dong 2D - Hoi tu Gauss tung cap','NumberTitle','off',
...
    'Position',[100 60 1100 700],'Color',[.94 .94 .94],'MenuBar','none','Resi
    ze','on');
hPanel=uipanel('Parent',hFig,'Title','THONG SO DAU VAO','FontSize',10, ...
    'FontWeight','bold','Position',[.01 .02 .28 .96]);
lab={'Chieu dai nhip L (m):','So phan tu Ne:','Chieu cao h (m):','Be rong b (
m):', ...
    'Modun E0 (Pa):','Mat do rho0 (kg/m3):','COV_E (sigma_f):','COV_rho (sigm
    a_g):','Tuong quan gamma_fg:'};
val={'5','40','0.4','0.25','30e9','2400','0.20','0.20','0.5'};
tag={'in_L','in_Ne','in_h','in_b','in_E0','in_rho0','in_sigma_f','in_sigma_g'
,'in_gamma_fg'};
for k=1:9, add_param(hPanel,k,lab{k},val{k},tag{k}); end
add_vector(hPanel,'Ty le dx/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 5 15 40 100]','in_
dx',.34);
add_vector(hPanel,'Ty le dy/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 5 15 40 100]','in_
dy',.23);
hBtnRun=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','TINH TOAN','
Units','normalized', ...
    'Position',[.05 .035 .43 .07],'FontSize',10,'FontWeight','bold','Backgrou
    ndColor',[0 .5 0], ...
    'ForegroundColor','white','Callback',@run_calculation);
hBtnExcel=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','XUAT EXCEL
','Units','normalized', ...
    'Position',[.52 .035 .43 .07],'FontSize',10,'FontWeight','bold','Backgrou
    ndColor',[.2 .4 .8], ...
    'ForegroundColor','white','Enable','off','Callback',@export_excel_callbac
    k);
hAx1=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.36 .57 .60 .37],'Bo
x','on');
hAx2=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.36 .09 .60 .37],'Bo
x','on');
    function add_param(parent,idx,lbl,v,tag0)
        y=.94-(idx-1)*.058;
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y .9 .023],'HorizontalAlignment','left');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed', ...
            'Position',[.05 y-.032 .9 .032],'Tag',tag0,'BackgroundColor','whi
```

```
        te');
end
function add_vector(parent,lbl,v,tag0,y)
    uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
    ized', ...
        'Position',[.05 y .9 .025],'HorizontalAlignment','left','FontWeig
        ht','bold');
    uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
    ed', ...
        'Position',[.05 y-.06 .9 .055],'Max',2,'Tag',tag0,'BackgroundColo
        r','white');
end
function x=read_scalar(tag0), x=str2double(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'
String')); end
function x=read_vector(tag0), x=str2num(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'Str
ing')); end
function run_calculation(hObject,~)
    set(hFig,'Pointer','watch'); set(hObject,'String','Dang tinh...','Ena
    ble','off');
    set(hBtnExcel,'Enable','off'); drawnow;
    try
        L=read_scalar('in_L'); Ne=read_scalar('in_Ne'); h=read_scalar('in
        _h');
        b=read_scalar('in_b'); E0=read_scalar('in_E0'); rho0=read_scalar(
        'in_rho0');
        sigma_f=read_scalar('in_sigma_f'); sigma_g=read_scalar('in_sigma_
        g'); gamma_fg=read_scalar('in_gamma_fg');
        dx_L_input=read_vector('in_dx'); dy_L_input=read_vector('in_dy');
        z=[L Ne h b E0 rho0 sigma_f sigma_g gamma_fg];
        if ~isreal(z)||any(isnan(z))||any(isinf(z)), error('Du lieu dau v
        ao phai la cac so huu han.'); end
        if L<=0||h<=0||b<=0||E0<=0||rho0<=0, error('L, h, b, E0 va rho0 p
        hai lon hon 0.'); end
        if sigma_f<0||sigma_g<0, error('sigma_f va sigma_g phai khong am.
        '); end
        if abs(gamma_fg)>1, error('gamma_fg phai nam trong [-1,1].'); end
        if Ne<2||abs(Ne-round(Ne))>0, error('So phan tu Ne phai la so ngu
        yen >=2.'); end
        Ne=round(Ne);
        if isempty(dx_L_input)||isempty(dy_L_input), error('Phai nhap day
        du dx/L va dy/L.'); end
        if ~isreal(dx_L_input)||any(isnan(dx_L_input(:)))||any(isinf(dx_L
        _input(:)))||any(dx_L_input(:)<=0), error('dx/L khong hop le.');
        end
        if ~isreal(dy_L_input)||any(isnan(dy_L_input(:)))||any(isinf(dy_L
        _input(:)))||any(dy_L_input(:)<=0), error('dy/L khong hop le.');
        end
        dx_L_input=dx_L_input(:).'; dy_L_input=dy_L_input(:).';
        if numel(dx_L_input)==numel(dy_L_input), dx_L_cases=dx_L_input; d
        y_L_cases=dy_L_input;
        elseif numel(dx_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input*ones(size(dy_L
        _input)); dy_L_cases=dy_L_input;
        elseif numel(dy_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input; dy_L_cases=dy
        _L_input*ones(size(dx_L_input));
        else, error('Hai vector dx/L va dy/L phai cung so phan tu, hoac m
        ot trong hai la so don.'); end
        nCase=numel(dx_L_cases); dx=dx_L_cases*L; dy=dy_L_cases*L;
        Le=L/Ne; I=b*h^3/12; Ndof=2*(Ne+1); Nw=3; Nm=7;
        K0_e=(E0*I/Le^3)*[12 6*Le -12 6*Le;6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2; ...
            -12 -6*Le 12 -6*Le;6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2];
        M0_e=(rho0*b*h*Le/420)*[156 22*Le 54 -13*Le;22*Le 4*Le^2 13*Le -3
        *Le^2; ...
```

```
    54 13*Le 156 -22*Le;-13*Le -3*Le^2 -22*Le 4*Le^2];
K0=zeros(Ndof); M0=zeros(Ndof);
for e=1:Ne
    dof=(2*e-1):(2*e+2); K0(dof,dof)=K0(dof,dof)+K0_e; M0(dof,dof
    )=M0(dof,dof)+M0_e;
end
dof_free=[2:Ndof-2 Ndof]; K0_ff=K0(dof_free,dof_free); M0_ff=M0(d
of_free,dof_free);
K0_ff=.5*(K0_ff+K0_ff'); M0_ff=.5*(M0_ff+M0_ff'); [V,D]=eig(K0_ff
,M0_ff); lambda_all=real(diag(D));
good=find(~isnan(lambda_all)&~isinf(lambda_all)&lambda_all>0);
if numel(good)<2, error('Khong tim thay du hai tri rieng duong.')
; end
[lambda_sorted,ord]=sort(lambda_all(good)); ind=good(ord); lambda
0=lambda_sorted(1:2); Phi0=cell(2,1);
for mode=1:2
    v=real(V(:,ind(mode))); a=sqrt(real(v'*M0_ff*v));
    if isnan(a)||isinf(a)||a<=0, error('Loi chuan hoa dang dao do
    ng.'); end
    Phi0{mode}=v/a;
end
DeltaK_i_e=zeros(4,4,Nw); coef_DeltaK=E0*b/Le^6;
DeltaK_i_e(:,:,1)=coef_DeltaK*[36*Le^2 24*Le^3 -36*Le^2 12*Le^3;2
4*Le^3 16*Le^4 -24*Le^3 8*Le^4; ...
    -36*Le^2 -24*Le^3 36*Le^2 -12*Le^3;12*Le^3 8*Le^4 -12*Le^3 4*
    Le^4];
DeltaK_i_e(:,:,2)=coef_DeltaK*[-144*Le -84*Le^2 144*Le -60*Le^2;-
84*Le^2 -48*Le^3 84*Le^2 -36*Le^3; ...
    144*Le 84*Le^2 -144*Le 60*Le^2;-60*Le^2 -36*Le^3 60*Le^2 -24*
    Le^3];
DeltaK_i_e(:,:,3)=coef_DeltaK*[144 72*Le -144 72*Le;72*Le 36*Le^2
-72*Le 36*Le^2; ...
    -144 -72*Le 144 -72*Le;72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2];
DeltaM_i_e=zeros(4,4,Nm);
DeltaM_i_e(:,:,1)=b*rho0*diag([1 0 0 0]);
DeltaM_i_e(:,:,2)=b*rho0*[0 1 0 0;1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
DeltaM_i_e(:,:,3)=(b*rho0/Le^2)*[-6 -2*Le 3 -Le;-2*Le Le^2 0 0;3
0 0 0;-Le 0 0 0];
DeltaM_i_e(:,:,4)=(b*rho0/Le^3)*[4 -2*Le -2 Le;-2*Le -4*Le^2 3*Le
-Le^2;-2 3*Le 0 0;Le -Le^2 0 0];
DeltaM_i_e(:,:,5)=(b*rho0/Le^4)*[9 8*Le -9 3*Le;8*Le 6*Le^2 -8*Le
3*Le^2; ...
    -9 -8*Le 9 -3*Le;3*Le 3*Le^2 -3*Le Le^2];
DeltaM_i_e(:,:,6)=(b*rho0/Le^5)*[-12 -7*Le 12 -5*Le;-7*Le -4*Le^2
7*Le -3*Le^2; ...
    12 7*Le -12 5*Le;-5*Le -3*Le^2 5*Le -2*Le^2];
DeltaM_i_e(:,:,7)=(b*rho0/Le^6)*[4 2*Le -4 2*Le;2*Le Le^2 -2*Le L
e^2; ...
    -4 -2*Le 4 -2*Le;2*Le Le^2 -2*Le Le^2];
Ndof_free=numel(dof_free); map=zeros(Ndof,1); for k=1:Ndof_free,
map(dof_free(k))=k; end
DeltaK_i_ff=zeros(Ndof_free,Ndof_free,Ne,Nw); DeltaM_i_ff=zeros(N
dof_free,Ndof_free,Ne,Nm);
for e=1:Ne
    dof=(2*e-1):(2*e+2); pos=map(dof); ok=pos>0;
    for i=1:Nw, T=DeltaK_i_e(:,:,i); DeltaK_i_ff(pos(ok),pos(ok),
    e,i)=T(ok,ok); end
    for j=1:Nm, T=DeltaM_i_e(:,:,j); DeltaM_i_ff(pos(ok),pos(ok),
    e,j)=T(ok,ok); end
end
lambda_Theta_I=zeros(2,Ne*Nw); lambda_Psi_I=zeros(2,Ne*Nm);
for mode=1:2
```

```
    ph=Phi0{mode}; ck=0; cm=0;
    for e=1:Ne
        for i=1:Nw, ck=ck+1; lambda_Theta_I(mode,ck)=real(ph'*Del
        taK_i_ff(:,:,e,i)*ph); end
        for j=1:Nm, cm=cm+1; lambda_Psi_I(mode,cm)=-lambda0(mode)
        *real(ph'*DeltaM_i_ff(:,:,e,j)*ph); end
    end
end
tol_Gauss=1e-6; tol_COV_rel=1e-6; tol_COV_abs=1e-12;
NG_list=[20 30 40 60 80 100 140 180]; required_passes=2;
xi_rules=cell(size(NG_list)); w_rules=xi_rules;
for ig=1:numel(NG_list)
    [xi_rules{ig},w_rules{ig}]=gauss_legendre_rule(NG_list(ig));
end
COV_lambda1=NaN(1,nCase); COV_lambda2=COV_lambda1;
NG_used=zeros(1,nCase); converged=false(1,nCase);
gauss_summary=NaN(nCase,22); gauss_history=zeros(0,21);
for ic=1:nCase
    set(hObject,'String',sprintf('Dang tinh %d/%d...',ic,nCase));
    drawnow;
    [COV_lambda,info,history]=gauss_convergence_dynamic( ...
        Le,h,dx(ic),dy(ic),Ne,sigma_f,sigma_g,gamma_fg, ...
        lambda0,lambda_Theta_I,lambda_Psi_I,NG_list, ...
        xi_rules,w_rules,tol_Gauss,tol_COV_rel, ...
        tol_COV_abs,required_passes);
    COV_lambda1(ic)=COV_lambda(1); COV_lambda2(ic)=COV_lambda(2);
    NG_used(ic)=info.NG; converged(ic)=info.converged;
    case_info=[ic dx_L_cases(ic) dy_L_cases(ic) dx(ic) dy(ic)];
    gauss_summary(ic,:)=[case_info history(end,:) info.converged]
    ;
    gauss_history=[gauss_history; ...
        repmat(case_info,size(history,1),1) history];
end
eq=max(abs(dx_L_cases-dy_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L_c
ases dy_L_cases])));
vx=max(dx_L_cases)-min(dx_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dx_L_cas
es)));
vy=max(dy_L_cases)-min(dy_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dy_L_cas
es)));
if eq
    xp=dx_L_cases; xl='d_x/L = d_y/L'; useLog=true;
elseif vx&&~vy
    xp=dx_L_cases; xl='d_x/L'; useLog=true;
elseif ~vx&&vy
    xp=dy_L_cases; xl='d_y/L'; useLog=true;
else
    xp=1:nCase; xl='Chi so truong hop'; useLog=false;
end
draw_curve(hAx1,xp,COV_lambda1,'b-s','b', ...
    'COV cua tri rieng - Mode 1','COV(\lambda_1)',xl,useLog);
draw_curve(hAx2,xp,COV_lambda2,'r-s','r', ...
    'COV cua tri rieng - Mode 2','COV(\lambda_2)',xl,useLog);
R.dx_L_cases=dx_L_cases; R.dy_L_cases=dy_L_cases;
R.dx=dx; R.dy=dy; R.COV_lambda1=COV_lambda1; R.COV_lambda2=COV_la
mbda2;
R.L=L; R.Ne=Ne; R.h=h; R.b=b; R.E0=E0; R.rho0=rho0;
R.sigma_f=sigma_f; R.sigma_g=sigma_g; R.gamma_fg=gamma_fg;
R.lambda0=lambda0; R.freq0_Hz=sqrt(lambda0)/(2*pi);
R.NG_used=NG_used; R.converged=converged;
R.NG_list=NG_list; R.tol_Gauss=tol_Gauss;
R.tol_COV_rel=tol_COV_rel; R.tol_COV_abs=tol_COV_abs;
R.required_passes=required_passes;
```

```
        R.gauss_summary=gauss_summary; R.gauss_history=gauss_history;
        guidata(hFig,R);
        set(hBtnExcel,'Enable','on');
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on');
        msg=sprintf('Da kiem tra %d cap dx,dy. Dat: %d; chua dat: %d.', .
        ..
            nCase,sum(converged),sum(~converged));
        if any(converged)
            msg=sprintf('%s\nSo diem Gauss cua cac cap dat: %d den %d.',
            ...
                msg,min(NG_used(converged)),max(NG_used(converged)));
        end
        if any(~converged)
            msg=sprintf('%s\nCap chua dat khong duoc dua vao duong COV.',
            msg);
        end
        msg=sprintf('%s\nXem HoiTuGauss va LichSuGauss trong Excel.',msg)
        ;
        msgbox(msg,'Thong bao');
    catch err
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on');
        errordlg(err.message,'Loi Chuong Trinh');
    end
    set(hFig,'Pointer','arrow');
end
function draw_curve(ax,x,y,sty,fc,ttl,yl,xl,useLog)
    axes(ax); cla;
    if useLog
        semilogx(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor',fc,'MarkerS
        ize',6);
    else
        plot(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor',fc,'MarkerSize'
        ,6);
    end
    grid(ax,'on'); set(ax,'XMinorGrid','on','YMinorGrid','on');
    title(ax,ttl); ylabel(ax,yl); xlabel(ax,xl);
end
function export_excel_callback(~,~)
    R=guidata(hFig);
    if isempty(R)||~isstruct(R)||~isfield(R,'COV_lambda1')
        errordlg('Khong co du lieu!','Loi'); return;
    end
    [file,path]=uiputfile('*.xlsx','Luu ket qua Dao Dong');
    if isequal(file,0), return; end
    fn=fullfile(path,file);
    try
        H1={'dx_L','dy_L','dx_m','dy_m','COV_lambda1', ...
            'COV_lambda2','GaussOrder','Converged'};
        S1=[H1;num2cell([R.dx_L_cases(:) R.dy_L_cases(:) ...
            R.dx(:) R.dy(:) R.COV_lambda1(:) R.COV_lambda2(:) ...
            R.NG_used(:) double(R.converged(:))])];
        N={'L';'Ne';'h';'b';'E0';'rho0';'sigma_f';'sigma_g'; ...
            'gamma_fg';'lambda0_1';'lambda0_2';'freq0_1_Hz'; ...
            'freq0_2_Hz';'tol_Gauss';'tol_COV_rel';'tol_COV_abs'; ...
            'required_passes';'NG_list';'Nw';'Nm'};
        V=[num2cell([R.L;R.Ne;R.h;R.b;R.E0;R.rho0;R.sigma_f; ...
            R.sigma_g;R.gamma_fg;R.lambda0(:);R.freq0_Hz(:); ...
            R.tol_Gauss;R.tol_COV_rel;R.tol_COV_abs;R.required_passes]);
            ...
            {mat2str(R.NG_list);3;7}];
        H3={'Case','dx_L','dy_L','dx_m','dy_m','GaussOrder', ...
            'COV_lambda1_last','COV_lambda2_last','Rel_Ix','Rel_Iy', ...
```

```
                'Rel_CovTheta','Rel_CovPsi','Rel_CovThetaPsi', ...
                'Rel_COV1','Abs_COV1','Rel_COV2','Abs_COV2', ...
                'PassIntegral','PassCOV1','PassCOV2','PassStreak','Converged'
                };
            H4=H3(1:end-1);
            sheets={'KetQua','ThongSoDauVao','HoiTuGauss','LichSuGauss'};
            data={S1,[{'ThongSo','GiaTri'};N V], ...
                [H3;num2cell(R.gauss_summary)], ...
                [H4;num2cell(R.gauss_history)]};
            for isheet=1:numel(sheets)
                [status,message]=xlswrite(fn,data{isheet},sheets{isheet});
                if ~status, error('Khong ghi duoc sheet %s: %s', ...
                        sheets{isheet},message.message); end
            end
            msgbox(['Da luu file: ' fn],'Thong bao');
        catch err
            errordlg(['Loi xuat file: ' err.message],'Loi');
        end
    end
end
function [x,w]=gauss_legendre_rule(n)
k=1:n-1; beta=k./sqrt(4*k.^2-1);
T=diag(beta,1)+diag(beta,-1);
[V,D]=eig(T); [x,ind]=sort(diag(D));
V=V(:,ind); w=2*(V(1,:).^2)';
end
function I=expabs_moment_split(p,q,a1,b1,a2,b2,ell,shift,g,w)
x1=.5*(b1-a1)*g+.5*(a1+b1);
w1=.5*(b1-a1)*w; I=0;
for i=1:length(g)
    sp=x1(i)-shift;
    if sp>a2&&sp<b2
        s=expabs_inner(q,x1(i),a2,sp,ell,shift,g,w)+ ...
          expabs_inner(q,x1(i),sp,b2,ell,shift,g,w);
    else
        s=expabs_inner(q,x1(i),a2,b2,ell,shift,g,w);
    end
    I=I+w1(i)*x1(i)^p*s;
end
end
function I=expabs_inner(q,x1,a,b,ell,shift,g,w)
if b<=a, I=0; return; end
x=.5*(b-a)*g+.5*(a+b);
wg=.5*(b-a)*w;
I=sum(wg.*x.^q.*exp(-abs(x-x1+shift)/ell));
end
function [COV_lambda,info,history]=gauss_convergence_dynamic( ...
    Le,h,dx,dy,Ne,sigma_f,sigma_g,gamma_fg,lambda0, ...
    lambda_Theta_I,lambda_Psi_I,NG_list,xi_rules,w_rules, ...
    tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,required_passes)
COV_lambda=[NaN NaN]; info.converged=false; info.NG=NG_list(end);
history=NaN(numel(NG_list),16); pass_streak=0;
for ig=1:numel(NG_list)
    [COV_now,Q]=dynamic_response_gauss(Le,h,dx,dy,Ne, ...
        sigma_f,sigma_g,gamma_fg,lambda0,lambda_Theta_I, ...
        lambda_Psi_I,xi_rules{ig},w_rules{ig});
    rel_int=NaN(1,5); rel_COV=[NaN NaN]; abs_COV=rel_COV;
    pass_int=false; pass_COV=[false false];
    if ig>1
        [rel_int(1),unused]=relative_difference(Q_old.I_x,Q.I_x);
        rel_y=zeros(1,3);
        for j=1:3
```

```
            [rel_y(j),unused]=relative_difference(Q_old.I_y(j),Q.I_y(j));
        end
        rel_int(2)=max(rel_y);
        [rel_int(3),unused]=relative_difference(Q_old.Theta,Q.Theta);
        [rel_int(4),unused]=relative_difference(Q_old.Psi,Q.Psi);
        [rel_int(5),unused]=relative_difference(Q_old.ThetaPsi,Q.ThetaPsi);
        for mode=1:2
            [rel_COV(mode),abs_COV(mode)]= ...
                relative_difference(COV_old(mode),COV_now(mode));
        end
        pass_int=all(rel_int<=tol_Gauss);
        pass_COV=abs_COV<=tol_COV_abs+tol_COV_rel*abs(COV_now);
        if pass_int&&all(pass_COV), pass_streak=pass_streak+1;
        else, pass_streak=0; end
    end
    history(ig,:)=[NG_list(ig) COV_now rel_int ...
        rel_COV(1) abs_COV(1) rel_COV(2) abs_COV(2) ...
        pass_int pass_COV pass_streak];
    if pass_streak>=required_passes
        COV_lambda=COV_now; info.converged=true; info.NG=NG_list(ig);
        history=history(1:ig,:); return;
    end
    Q_old=Q; COV_old=COV_now;
end
end
function [COV_lambda,Q]=dynamic_response_gauss(Le,h,dx,dy,Ne, ...
    sigma_f,sigma_g,gamma_fg,lambda0,lambda_Theta_I, ...
    lambda_Psi_I,xi_G,w_G)
Nw=3; Nm=7; lag_e=-(Ne-1):(Ne-1); Nlag=numel(lag_e);
I_y22=expabs_moment_split(2,2,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_y00=expabs_moment_split(0,0,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_y20=expabs_moment_split(2,0,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
Q.I_y=[I_y22 I_y00 I_y20]; Q.I_x=zeros(Nm,Nm,Nlag);
if any(~isfinite(Q.I_y))||any(Q.I_y<=0)
    error('Tich phan theo y khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
Q.Theta=zeros(Nw,Nw,Nlag); Q.Psi=zeros(Nm,Nm,Nlag);
Q.ThetaPsi=zeros(Nw,Nm,Nlag);
for ir=1:Nlag
    Delta_x=Le*lag_e(ir); I_x=zeros(Nm,Nm);
    for i1=1:Nm
        for i2=1:Nm
            I_x(i1,i2)=expabs_moment_split(i1-1,i2-1, ...
                0,Le,0,Le,dx,Delta_x,xi_G,w_G);
        end
    end
    Q.I_x(:,:,ir)=I_x;
    Q.Theta(:,:,ir)=I_y22*I_x(1:Nw,1:Nw);
    Q.Psi(:,:,ir)=I_y00*I_x;
    Q.ThetaPsi(:,:,ir)=I_y20*I_x(1:Nw,:);
end
if any(~isfinite(Q.I_x(:)))||Q.I_x(1,1,Ne)<=0
    error('Tich phan theo x khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
Cov_Theta_lag=sigma_f^2*Q.Theta;
Cov_Psi_lag=sigma_g^2*Q.Psi;
Cov_ThetaPsi_lag=gamma_fg*sigma_f*sigma_g*Q.ThetaPsi;
Cov_Theta=zeros(Ne*Nw); Cov_Psi=zeros(Ne*Nm);
Cov_ThetaPsi=zeros(Ne*Nw,Ne*Nm);
for e1=1:Ne
    row_Theta=(e1-1)*Nw+(1:Nw); row_Psi=(e1-1)*Nm+(1:Nm);
    for e2=1:Ne
```

```
        col_Theta=(e2-1)*Nw+(1:Nw); col_Psi=(e2-1)*Nm+(1:Nm);
        ir=(e2-e1)+Ne;
        Cov_Theta(row_Theta,col_Theta)=Cov_Theta_lag(:,:,ir);
        Cov_Psi(row_Psi,col_Psi)=Cov_Psi_lag(:,:,ir);
        Cov_ThetaPsi(row_Theta,col_Psi)=Cov_ThetaPsi_lag(:,:,ir);
    end
end
Cov_Theta=.5*(Cov_Theta+Cov_Theta');
Cov_Psi=.5*(Cov_Psi+Cov_Psi'); COV_lambda=zeros(1,2);
for mode=1:2
    a=lambda_Theta_I(mode,:); c=lambda_Psi_I(mode,:);
    Var_lambda_Theta=a*Cov_Theta*a';
    Var_lambda_Psi=c*Cov_Psi*c';
    Var_lambda_cross=2*a*Cov_ThetaPsi*c';
    Var_lambda=Var_lambda_Theta+Var_lambda_Psi+Var_lambda_cross;
    scale_Var_lambda=max([abs(Var_lambda_Theta) ...
        abs(Var_lambda_Psi) abs(Var_lambda_cross) eps]);
    if Var_lambda<0&&abs(Var_lambda)<=1e-10*scale_Var_lambda
        Var_lambda=0;
    end
    if ~isfinite(Var_lambda)||Var_lambda<0
        error('Phuong sai lambda_%d khong hop le: %.6e.',mode,Var_lambda);
    end
    COV_lambda(mode)=sqrt(Var_lambda)/lambda0(mode);
end
if any(~isfinite(COV_lambda)), error('COV tri rieng khong huu han.'); end
end
function [rel_err,abs_err]=relative_difference(A,B)
abs_err=max(abs(A(:)-B(:))); scale=max(abs(B(:)));
if scale>0, rel_err=abs_err/scale;
elseif abs_err==0, rel_err=0;
else, rel_err=Inf; end
end
```

b. Chương trình phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

```
function SFEM_GUI_DAO_DONG_3D
clc; close all;
hFig=figure('Name','Dao dong 3D - Hoi tu Gauss tung bo','NumberTitle','off',
...
    'Position',[100 60 1120 700],'Color',[.94 .94 .94],'MenuBar','none','Resi
    ze','on');
hPanel=uipanel('Parent',hFig,'Title','THONG SO DAU VAO','FontSize',10, ...
    'FontWeight','bold','Position',[.01 .02 .28 .96]);
lab={'Chieu dai nhip L (m):','So phan tu Ne:','Chieu cao h (m):','Be rong b (
m):', ...
    'Modun E0 (Pa):','Mat do rho0 (kg/m3):','COV_E (sigma_f):','COV_rho (sigm
    a_g):','Tuong quan gamma_fg:'};
val={'5','40','0.4','0.25','30e9','2400','0.05','0.05','1'};
tag={'in_L','in_Ne','in_h','in_b','in_E0','in_rho0','in_sigma_f','in_sigma_g'
,'in_gamma_fg'};
for k=1:9, add_param(hPanel,k,lab{k},val{k},tag{k}); end
add_vector(hPanel,'Ty le dx/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 5 15 40 100]','in_
dx',.34);
add_vector(hPanel,'Ty le dy/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 5 15 40 100]','in_
dy',.235);
add_vector(hPanel,'Ty le dz/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 5 15 40 100]','in_
dz',.13);
hBtnRun=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','TINH TOAN','
Units','normalized', ...
    'Position',[.05 .015 .43 .06],'FontSize',10,'FontWeight','bold','Backgrou
    ndColor',[0 .5 0], ...
    'ForegroundColor','white','Callback',@run_calculation);
hBtnExcel=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','XUAT EXCEL
```

```
','Units','normalized', ...
    'Position',[.52 .015 .43 .06],'FontSize',10,'FontWeight','bold','Backgrou
    ndColor',[.2 .4 .8], ...
    'ForegroundColor','white','Enable','off','Callback',@export_excel_callbac
    k);
hAx1=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.36 .57 .60 .37],'Bo
x','on');
hAx2=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.36 .09 .60 .37],'Bo
x','on');
    function add_param(parent,idx,lbl,v,tag0)
        y=.95-(idx-1)*.055;
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y .9 .022],'HorizontalAlignment','left');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed', ...
            'Position',[.05 y-.03 .9 .03],'Tag',tag0,'BackgroundColor','white
            ');
    end
    function add_vector(parent,lbl,v,tag0,y)
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y .9 .024],'HorizontalAlignment','left','FontWeig
            ht','bold');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed', ...
            'Position',[.05 y-.055 .9 .05],'Max',2,'Tag',tag0,'BackgroundColo
            r','white');
    end
    function x=read_scalar(tag0)
        x=str2double(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'String'));
    end
    function x=read_vector(tag0)
        x=str2num(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'String'));
    end
    function run_calculation(hObject,~)
        set(hFig,'Pointer','watch'); set(hObject,'String','Dang tinh...','Ena
        ble','off');
        set(hBtnExcel,'Enable','off'); drawnow;
        try
            L=read_scalar('in_L'); Ne=read_scalar('in_Ne'); h=read_scalar('in
            _h');
            b=read_scalar('in_b'); E0=read_scalar('in_E0'); rho0=read_scalar(
            'in_rho0');
            sigma_f=read_scalar('in_sigma_f'); sigma_g=read_scalar('in_sigma_
            g'); gamma_fg=read_scalar('in_gamma_fg');
            dx_L_input=read_vector('in_dx'); dy_L_input=read_vector('in_dy');
            dz_L_input=read_vector('in_dz');
            z=[L Ne h b E0 rho0 sigma_f sigma_g gamma_fg];
            if ~isreal(z)||any(isnan(z))||any(isinf(z)), error('Du lieu dau v
            ao phai la cac so huu han.'); end
            if L<=0||h<=0||b<=0||E0<=0||rho0<=0, error('L, h, b, E0 va rho0 p
            hai lon hon 0.'); end
            if sigma_f<0||sigma_g<0, error('sigma_f va sigma_g phai khong am.
            '); end
            if abs(gamma_fg)>1, error('gamma_fg phai nam trong [-1,1].'); end
            if Ne<2||abs(Ne-round(Ne))>0, error('So phan tu Ne phai la so ngu
            yen >=2.'); end
            Ne=round(Ne);
            if isempty(dx_L_input)||isempty(dy_L_input)||isempty(dz_L_input),
            error('Phai nhap day du dx/L, dy/L va dz/L.'); end
            if ~valid_ratio(dx_L_input)||~valid_ratio(dy_L_input)||~valid_rat
```

```
io(dz_L_input)
    error('Cac ty le tuong quan phai la so thuc duong huu han.');
end
dx_L_input=dx_L_input(:).'; dy_L_input=dy_L_input(:).'; dz_L_inpu
t=dz_L_input(:).';
nCase=max([numel(dx_L_input) numel(dy_L_input) numel(dz_L_input)]
);
if ~oklen(dx_L_input,nCase)||~oklen(dy_L_input,nCase)||~oklen(dz_
L_input,nCase)
    error('Moi dau vao dx/L, dy/L, dz/L phai la so don hoac vecto
    r cung do dai.');
end
if numel(dx_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input*ones(1,nCase); els
e, dx_L_cases=dx_L_input; end
if numel(dy_L_input)==1, dy_L_cases=dy_L_input*ones(1,nCase); els
e, dy_L_cases=dy_L_input; end
if numel(dz_L_input)==1, dz_L_cases=dz_L_input*ones(1,nCase); els
e, dz_L_cases=dz_L_input; end
dx=dx_L_cases*L; dy=dy_L_cases*L; dz=dz_L_cases*L;
Le=L/Ne; I=b*h^3/12; Ndof=2*(Ne+1); Nw=3; Nm=7;
K0_e=(E0*I/Le^3)*[12 6*Le -12 6*Le;6*Le 4*Le^2 -6*Le 2*Le^2; ...
    -12 -6*Le 12 -6*Le;6*Le 2*Le^2 -6*Le 4*Le^2];
M0_e=(rho0*b*h*Le/420)*[156 22*Le 54 -13*Le;22*Le 4*Le^2 13*Le -3
*Le^2; ...
    54 13*Le 156 -22*Le;-13*Le -3*Le^2 -22*Le 4*Le^2];
K0=zeros(Ndof); M0=zeros(Ndof);
for e=1:Ne
    dof=(2*e-1):(2*e+2);
    K0(dof,dof)=K0(dof,dof)+K0_e;
    M0(dof,dof)=M0(dof,dof)+M0_e;
end
dof_free=[2:Ndof-2 Ndof];
K0_ff=K0(dof_free,dof_free); M0_ff=M0(dof_free,dof_free);
K0_ff=.5*(K0_ff+K0_ff'); M0_ff=.5*(M0_ff+M0_ff');
[V,D]=eig(K0_ff,M0_ff);
lambda_all=real(diag(D));
good=find(~isnan(lambda_all)&~isinf(lambda_all)&lambda_all>0);
if numel(good)<2, error('Khong tim thay du hai tri rieng duong.')
; end
[lambda_sorted,ord]=sort(lambda_all(good));
ind=good(ord); lambda0=lambda_sorted(1:2); Phi0=cell(2,1);
for mode=1:2
    v=real(V(:,ind(mode)));
    a=sqrt(real(v'*M0_ff*v));
    if isnan(a)||isinf(a)||a<=0, error('Loi chuan hoa dang dao do
    ng.'); end
    Phi0{mode}=v/a;
end
DeltaK_i_e=zeros(4,4,Nw); coef_DeltaK=E0/Le^6;
DeltaK_i_e(:,:,1)=coef_DeltaK*[36*Le^2 24*Le^3 -36*Le^2 12*Le^3;
...
    24*Le^3 16*Le^4 -24*Le^3 8*Le^4; ...
    -36*Le^2 -24*Le^3 36*Le^2 -12*Le^3; ...
    12*Le^3 8*Le^4 -12*Le^3 4*Le^4];
DeltaK_i_e(:,:,2)=coef_DeltaK*[-144*Le -84*Le^2 144*Le -60*Le^2;
...
    -84*Le^2 -48*Le^3 84*Le^2 -36*Le^3; ...
    144*Le 84*Le^2 -144*Le 60*Le^2; ...
    -60*Le^2 -36*Le^3 60*Le^2 -24*Le^3];
DeltaK_i_e(:,:,3)=coef_DeltaK*[144 72*Le -144 72*Le; ...
    72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2; ...
    -144 -72*Le 144 -72*Le; ...
```

```
    72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2];
DeltaM_i_e=zeros(4,4,Nm);
DeltaM_i_e(:,:,1)=rho0*diag([1 0 0 0]);
DeltaM_i_e(:,:,2)=rho0*[0 1 0 0;1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
DeltaM_i_e(:,:,3)=(rho0/Le^2)*[-6 -2*Le 3 -Le; ...
    -2*Le Le^2 0 0;3 0 0 0;-Le 0 0 0];
DeltaM_i_e(:,:,4)=(rho0/Le^3)*[4 -2*Le -2 Le; ...
    -2*Le -4*Le^2 3*Le -Le^2; ...
    -2 3*Le 0 0;Le -Le^2 0 0];
DeltaM_i_e(:,:,5)=(rho0/Le^4)*[9 8*Le -9 3*Le; ...
    8*Le 6*Le^2 -8*Le 3*Le^2; ...
    -9 -8*Le 9 -3*Le; ...
    3*Le 3*Le^2 -3*Le Le^2];
DeltaM_i_e(:,:,6)=(rho0/Le^5)*[-12 -7*Le 12 -5*Le; ...
    -7*Le -4*Le^2 7*Le -3*Le^2; ...
    12 7*Le -12 5*Le; ...
    -5*Le -3*Le^2 5*Le -2*Le^2];
DeltaM_i_e(:,:,7)=(rho0/Le^6)*[4 2*Le -4 2*Le; ...
    2*Le Le^2 -2*Le Le^2; ...
    -4 -2*Le 4 -2*Le; ...
    2*Le Le^2 -2*Le Le^2];
Ndof_free=numel(dof_free);
map=zeros(Ndof,1);
for k=1:Ndof_free, map(dof_free(k))=k; end
DeltaK_i_ff=zeros(Ndof_free,Ndof_free,Ne,Nw);
DeltaM_i_ff=zeros(Ndof_free,Ndof_free,Ne,Nm);
for e=1:Ne
    dof=(2*e-1):(2*e+2);
    pos=map(dof); ok=pos>0;
    for i=1:Nw
        T=DeltaK_i_e(:,:,i);
        DeltaK_i_ff(pos(ok),pos(ok),e,i)=T(ok,ok);
    end
    for j=1:Nm
        T=DeltaM_i_e(:,:,j);
        DeltaM_i_ff(pos(ok),pos(ok),e,j)=T(ok,ok);
    end
end
lambda_Theta_I=zeros(2,Ne*Nw);
lambda_Psi_I=zeros(2,Ne*Nm);
for mode=1:2
    ph=Phi0{mode};
    ik=0; im=0;
    for e=1:Ne
        for i=1:Nw
            ik=ik+1;
            lambda_Theta_I(mode,ik)=real(ph'*DeltaK_i_ff(:,:,e,i)
            *ph);
        end
        for j=1:Nm
            im=im+1;
            lambda_Psi_I(mode,im)=-lambda0(mode)*real(ph'*DeltaM_
            i_ff(:,:,e,j)*ph);
        end
    end
end
tol_Gauss=1e-6; tol_COV_rel=1e-6; tol_COV_abs=1e-12;
NG_list=[20 30 40 60 80 100 140 180]; required_passes=2;
xi_rules=cell(size(NG_list)); w_rules=xi_rules;
for ig=1:numel(NG_list)
    [xi_rules{ig},w_rules{ig}]=gauss_legendre_rule(NG_list(ig));
end
```

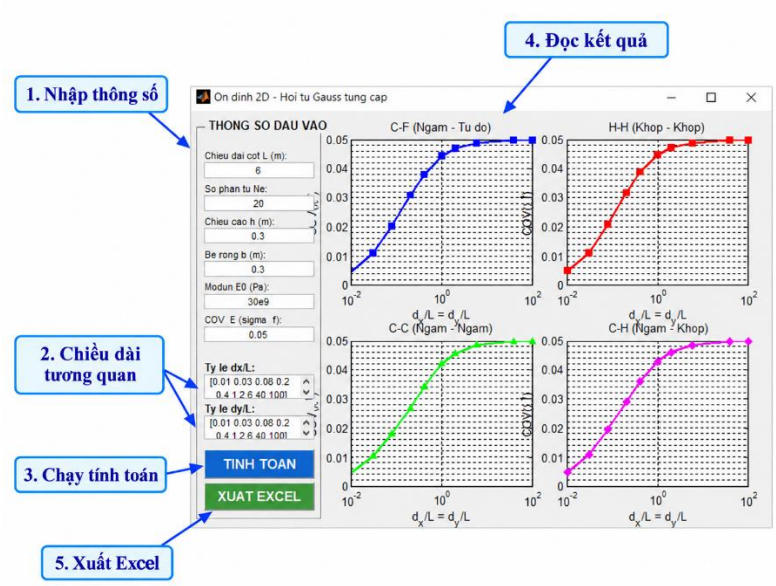
```
COV_lambda1=NaN(1,nCase); COV_lambda2=COV_lambda1;
NG_used=zeros(1,nCase); converged=false(1,nCase);
gauss_summary=NaN(nCase,25); gauss_history=zeros(0,24);
for ic=1:nCase
    set(hObject,'String',sprintf('Dang tinh %d/%d...',ic,nCase));
    drawnow;
    [COV_lambda,info,history]=gauss_convergence_dynamic3d( ...
        Le,h,b,dx(ic),dy(ic),dz(ic),Ne,sigma_f,sigma_g,gamma_fg,
        ...
        lambda0,lambda_Theta_I,lambda_Psi_I,NG_list, ...
        xi_rules,w_rules,tol_Gauss,tol_COV_rel, ...
        tol_COV_abs,required_passes);
    COV_lambda1(ic)=COV_lambda(1); COV_lambda2(ic)=COV_lambda(2);
    NG_used(ic)=info.NG; converged(ic)=info.converged;
    case_info=[ic dx_L_cases(ic) dy_L_cases(ic) dz_L_cases(ic) ..
    .
        dx(ic) dy(ic) dz(ic)];
    gauss_summary(ic,:)=[case_info history(end,:) info.converged]
    ;
    gauss_history=[gauss_history; ...
        repmat(case_info,size(history,1),1) history];
end
eqXY=max(abs(dx_L_cases-dy_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L
_cases dy_L_cases])));
eqXZ=max(abs(dx_L_cases-dz_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L
_cases dz_L_cases])));
vx=max(dx_L_cases)-min(dx_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dx_L_cas
es)));
vy=max(dy_L_cases)-min(dy_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dy_L_cas
es)));
vz=max(dz_L_cases)-min(dz_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dz_L_cas
es)));
if eqXY&&eqXZ
    xp=dx_L_cases; xl='d_x/L = d_y/L = d_z/L'; useLog=true;
elseif vx&&~vy&&~vz
    xp=dx_L_cases; xl='d_x/L'; useLog=true;
elseif ~vx&&vy&&~vz
    xp=dy_L_cases; xl='d_y/L'; useLog=true;
elseif ~vx&&~vy&&vz
    xp=dz_L_cases; xl='d_z/L'; useLog=true;
else
    xp=1:nCase; xl='Chi so truong hop'; useLog=false;
end
draw_curve(hAx1,xp,COV_lambda1,'b-s','b', ...
    'COV cua tri rieng - Mode 1','COV(\lambda_1)',xl,useLog);
draw_curve(hAx2,xp,COV_lambda2,'r-s','r', ...
    'COV cua tri rieng - Mode 2','COV(\lambda_2)',xl,useLog);
R.dx_L_cases=dx_L_cases; R.dy_L_cases=dy_L_cases; R.dz_L_cases=dz
_L_cases;
R.dx=dx; R.dy=dy; R.dz=dz;
R.COV_lambda1=COV_lambda1; R.COV_lambda2=COV_lambda2;
R.L=L; R.Ne=Ne; R.h=h; R.b=b;
R.E0=E0; R.rho0=rho0; R.sigma_f=sigma_f; R.sigma_g=sigma_g; R.gam
ma_fg=gamma_fg;
R.lambda0=lambda0; R.freq0_Hz=sqrt(lambda0)/(2*pi);
R.NG_used=NG_used; R.converged=converged;
R.NG_list=NG_list; R.tol_Gauss=tol_Gauss;
R.tol_COV_rel=tol_COV_rel; R.tol_COV_abs=tol_COV_abs;
R.required_passes=required_passes;
R.gauss_summary=gauss_summary; R.gauss_history=gauss_history;
guidata(hFig,R);
set(hBtnExcel,'Enable','on');
```

```
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on');
        msg=sprintf('Da kiem tra %d bo dx,dy,dz. Dat: %d; chua dat: %d.',
        ...
            nCase,sum(converged),sum(~converged));
        if any(converged)
            msg=sprintf('%s\nSo diem Gauss cua cac bo dat: %d den %d.', .
            ..
                msg,min(NG_used(converged)),max(NG_used(converged)));
        end
        if any(~converged)
            msg=sprintf('%s\nBo chua dat khong duoc dua vao duong COV.',m
            sg);
        end
        msg=sprintf('%s\nXem HoiTuGauss va LichSuGauss trong Excel.',msg)
        ;
        msgbox(msg,'Thong bao');
    catch err
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on');
        errordlg(err.message,'Loi Chuong Trinh');
    end
    set(hFig,'Pointer','arrow');
end
function tf=valid_ratio(x)
    tf=isreal(x)&&~any(isnan(x(:)))&& ...
        ~any(isinf(x(:)))&&~any(x(:)<=0);
end
function tf=oklen(x,n)
    tf=(numel(x)==1)||(numel(x)==n);
end
function draw_curve(ax,x,y,sty,fc,ttl,yl,xl,useLog)
    axes(ax); cla;
    if useLog
        semilogx(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5, ...
            'MarkerFaceColor',fc,'MarkerSize',6);
    else
        plot(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5, ...
            'MarkerFaceColor',fc,'MarkerSize',6);
    end
    grid(ax,'on');
    set(ax,'XMinorGrid','on','YMinorGrid','on');
    title(ax,ttl); ylabel(ax,yl); xlabel(ax,xl);
end
function export_excel_callback(~,~)
    R=guidata(hFig);
    if isempty(R)||~isstruct(R)||~isfield(R,'COV_lambda1')
        errordlg('Khong co du lieu!','Loi');
        return;
    end
    [file,path]=uiputfile('*.xlsx','Luu ket qua Dao Dong 3D');
    if isequal(file,0), return; end
    fn=fullfile(path,file);
    try
        H1={'dx_L','dy_L','dz_L','dx_m','dy_m','dz_m', ...
            'COV_lambda1', ...
            'COV_lambda2','GaussOrder','Converged'};
        S1=[H1;num2cell([R.dx_L_cases(:) R.dy_L_cases(:) ...
            R.dz_L_cases(:) R.dx(:) R.dy(:) R.dz(:) ...
            R.COV_lambda1(:) R.COV_lambda2(:) ...
            R.NG_used(:) double(R.converged(:))])];
        N={'L';'Ne';'h';'b';'E0';'rho0';'sigma_f';'sigma_g'; ...
            'gamma_fg';'lambda0_1';'lambda0_2';'freq0_1_Hz'; ...
            'freq0_2_Hz';'tol_Gauss';'tol_COV_rel';'tol_COV_abs'; ...
```

```
                'required_passes';'NG_list';'Nw';'Nm'};
            V=[num2cell([R.L;R.Ne;R.h;R.b;R.E0;R.rho0;R.sigma_f; ...
                R.sigma_g;R.gamma_fg;R.lambda0(:);R.freq0_Hz(:); ...
                R.tol_Gauss;R.tol_COV_rel;R.tol_COV_abs;R.required_passes]);
                ...
                {mat2str(R.NG_list);3;7}];
            H3={'Case','dx_L','dy_L','dz_L','dx_m','dy_m','dz_m', ...
                'GaussOrder', ...
                'COV_lambda1_last','COV_lambda2_last','Rel_Ix','Rel_Iy','Rel_
                Iz', ...
                'Rel_CovTheta','Rel_CovPsi','Rel_CovThetaPsi', ...
                'Rel_COV1','Abs_COV1','Rel_COV2','Abs_COV2', ...
                'PassIntegral','PassCOV1','PassCOV2','PassStreak','Converged'
                };
            H4=H3(1:end-1);
            sheets={'KetQua','ThongSoDauVao','HoiTuGauss','LichSuGauss'};
            data={S1,[{'ThongSo','GiaTri'};N V], ...
                [H3;num2cell(R.gauss_summary)], ...
                [H4;num2cell(R.gauss_history)]};
            for isheet=1:numel(sheets)
                [status,message]=xlswrite(fn,data{isheet},sheets{isheet});
                if ~status, error('Khong ghi duoc sheet %s: %s', ...
                        sheets{isheet},message.message); end
            end
            msgbox(['Da luu file: ' fn],'Thong bao');
        catch err
            errordlg(['Loi xuat file: ' err.message],'Loi');
        end
    end
end
function [x,w]=gauss_legendre_rule(n)
k=1:n-1;
beta=k./sqrt(4*k.^2-1);
T=diag(beta,1)+diag(beta,-1);
[V,D]=eig(T);
[x,ind]=sort(diag(D));
V=V(:,ind);
w=2*(V(1,:).^2)';
end
function I=expabs_moment_split(p,q,a1,b1,a2,b2,ell,shift,g,w)
x1=.5*(b1-a1)*g+.5*(a1+b1);
w1=.5*(b1-a1)*w;
I=0;
for i=1:length(g)
    sp=x1(i)-shift;
    if sp>a2&&sp<b2
        s=expabs_inner(q,x1(i),a2,sp,ell,shift,g,w)+ ...
          expabs_inner(q,x1(i),sp,b2,ell,shift,g,w);
    else
        s=expabs_inner(q,x1(i),a2,b2,ell,shift,g,w);
    end
    I=I+w1(i)*x1(i)^p*s;
end
end
function I=expabs_inner(q,x1,a,b,ell,shift,g,w)
if b<=a
    I=0;
    return;
end
x=.5*(b-a)*g+.5*(a+b);
wg=.5*(b-a)*w;
I=sum(wg.*x.^q.*exp(-abs(x-x1+shift)/ell));
```

```
end
function [COV_lambda,info,history]=gauss_convergence_dynamic3d( ...
    Le,h,b,dx,dy,dz,Ne,sigma_f,sigma_g,gamma_fg,lambda0, ...
    lambda_Theta_I,lambda_Psi_I,NG_list,xi_rules,w_rules, ...
    tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,required_passes)
COV_lambda=[NaN NaN]; info.converged=false; info.NG=NG_list(end);
history=NaN(numel(NG_list),17); pass_streak=0;
for ig=1:numel(NG_list)
    [COV_now,Q]=dynamic_response_gauss3d(Le,h,b,dx,dy,dz,Ne, ...
        sigma_f,sigma_g,gamma_fg,lambda0,lambda_Theta_I, ...
        lambda_Psi_I,xi_rules{ig},w_rules{ig});
    rel_int=NaN(1,6); rel_COV=[NaN NaN]; abs_COV=rel_COV;
    pass_int=false; pass_COV=[false false];
    if ig>1
        [rel_int(1),unused]=relative_difference(Q_old.I_x,Q.I_x);
        rel_y=zeros(1,3);
        for j=1:3
            [rel_y(j),unused]=relative_difference(Q_old.I_y(j),Q.I_y(j));
        end
        rel_int(2)=max(rel_y);
        [rel_int(3),unused]=relative_difference(Q_old.I_z,Q.I_z);
        [rel_int(4),unused]=relative_difference(Q_old.Theta,Q.Theta);
        [rel_int(5),unused]=relative_difference(Q_old.Psi,Q.Psi);
        [rel_int(6),unused]=relative_difference(Q_old.ThetaPsi,Q.ThetaPsi);
        for mode=1:2
            [rel_COV(mode),abs_COV(mode)]= ...
                relative_difference(COV_old(mode),COV_now(mode));
        end
        pass_int=all(rel_int<=tol_Gauss);
        pass_COV=abs_COV<=tol_COV_abs+tol_COV_rel*abs(COV_now);
        if pass_int&&all(pass_COV), pass_streak=pass_streak+1;
        else, pass_streak=0; end
    end
    history(ig,:)=[NG_list(ig) COV_now rel_int ...
        rel_COV(1) abs_COV(1) rel_COV(2) abs_COV(2) ...
        pass_int pass_COV pass_streak];
    if pass_streak>=required_passes
        COV_lambda=COV_now; info.converged=true; info.NG=NG_list(ig);
        history=history(1:ig,:); return;
    end
    Q_old=Q; COV_old=COV_now;
end
end
function [COV_lambda,Q]=dynamic_response_gauss3d(Le,h,b,dx,dy,dz,Ne, ...
    sigma_f,sigma_g,gamma_fg,lambda0,lambda_Theta_I, ...
    lambda_Psi_I,xi_G,w_G)
Nw=3; Nm=7; lag_e=-(Ne-1):(Ne-1); Nlag=numel(lag_e);
I_y22=expabs_moment_split(2,2,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_y00=expabs_moment_split(0,0,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_y20=expabs_moment_split(2,0,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_z00=expabs_moment_split(0,0,-b/2,b/2,-b/2,b/2,dz,0,xi_G,w_G);
Q.I_z=I_z00; Q.I_y=[I_y22 I_y00 I_y20];
Q.I_x=zeros(Nm,Nm,Nlag);
if any(~isfinite(Q.I_y))||any(Q.I_y<=0)
    error('Tich phan theo y khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
if ~isfinite(I_z00)||I_z00<=0
    error('Tich phan theo z khong hop le tai dz=%g.',dz);
end
Q.Theta=zeros(Nw,Nw,Nlag); Q.Psi=zeros(Nm,Nm,Nlag);
Q.ThetaPsi=zeros(Nw,Nm,Nlag);
for ir=1:Nlag
```

```
    Delta_x=Le*lag_e(ir); I_x=zeros(Nm,Nm);
    for i1=1:Nm
        for i2=1:Nm
            I_x(i1,i2)=expabs_moment_split(i1-1,i2-1, ...
                0,Le,0,Le,dx,Delta_x,xi_G,w_G);
        end
    end
    Q.I_x(:,:,ir)=I_x;
    Q.Theta(:,:,ir)=I_y22*I_z00*I_x(1:Nw,1:Nw);
    Q.Psi(:,:,ir)=I_y00*I_z00*I_x;
    Q.ThetaPsi(:,:,ir)=I_y20*I_z00*I_x(1:Nw,:);
end
if any(~isfinite(Q.I_x(:)))||Q.I_x(1,1,Ne)<=0
    error('Tich phan theo x khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
Cov_Theta_lag=sigma_f^2.*Q.Theta;
Cov_Psi_lag=sigma_g^2.*Q.Psi;
Cov_ThetaPsi_lag=(gamma_fg*sigma_f*sigma_g).*Q.ThetaPsi;
Cov_Theta=zeros(Ne*Nw); Cov_Psi=zeros(Ne*Nm);
Cov_ThetaPsi=zeros(Ne*Nw,Ne*Nm);
for e1=1:Ne
    row_Theta=(e1-1)*Nw+(1:Nw); row_Psi=(e1-1)*Nm+(1:Nm);
    for e2=1:Ne
        col_Theta=(e2-1)*Nw+(1:Nw); col_Psi=(e2-1)*Nm+(1:Nm);
        ir=(e2-e1)+Ne;
        Cov_Theta(row_Theta,col_Theta)=Cov_Theta_lag(:,:,ir);
        Cov_Psi(row_Psi,col_Psi)=Cov_Psi_lag(:,:,ir);
        Cov_ThetaPsi(row_Theta,col_Psi)=Cov_ThetaPsi_lag(:,:,ir);
    end
end
Cov_Theta=.5*(Cov_Theta+Cov_Theta');
Cov_Psi=.5*(Cov_Psi+Cov_Psi'); COV_lambda=zeros(1,2);
for mode=1:2
    a=lambda_Theta_I(mode,:); c=lambda_Psi_I(mode,:);
    Var_lambda_Theta=a*Cov_Theta*a';
    Var_lambda_Psi=c*Cov_Psi*c';
    Var_lambda_cross=2*a*Cov_ThetaPsi*c';
    Var_lambda=Var_lambda_Theta+Var_lambda_Psi+Var_lambda_cross;
    scale_Var_lambda=max([abs(Var_lambda_Theta) ...
        abs(Var_lambda_Psi) abs(Var_lambda_cross) eps]);
    if Var_lambda<0&&abs(Var_lambda)<=1e-10*scale_Var_lambda
        Var_lambda=0;
    end
    if ~isfinite(Var_lambda)||Var_lambda<0
        error('Phuong sai lambda_%d khong hop le: %.6e.',mode,Var_lambda);
    end
    COV_lambda(mode)=sqrt(Var_lambda)/lambda0(mode);
end
if any(~isfinite(COV_lambda)), error('COV tri rieng khong huu han.'); end
end
function [rel_err,abs_err]=relative_difference(A,B)
abs_err=max(abs(A(:)-B(:))); scale=max(abs(B(:)));
if scale>0, rel_err=abs_err/scale;
elseif abs_err==0, rel_err=0;
else, rel_err=Inf; end
end
```



Hình D.3. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán ổn định

C.1. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình được xây dựng với giao diện GUI trong MATLAB. Hai chương trình 2D và 3D được lưu lần lượt với tên SFEM_GUI_ON_DINH_2D.m và SFEM_GUI_ON_DINH_3D.m.

1. Khởi động: Mở MATLAB, tạo tệp hàm (*.m), sao chép mã nguồn tương ứng tại Mục C.4 và lưu đúng tên chương trình.
2. Mở giao diện: Gõ tên chương trình trong Command Window và nhấn Enter.
3. Nhập dữ liệu: Nhập thông số hình học, vật liệu, số phần tử, COV_E và các tỷ số chiều dài tương quan.
4. Tính toán: Nhấn "TÍNH TOÁN" để xác định tải trọng tới hạn và COV.
5. Quan sát kết quả: Chương trình hiển thị kết quả cho bốn điều kiện biên CF, HH, CC và CH.
6. Lưu kết quả: Nhấn "XUẤT EXCEL" để lưu dữ liệu.

C.2. Tệp dữ liệu đầu vào (Input Data)

Các tham số được nhập qua giao diện GUI gồm:

- **L:** Chiều dài cột.
- **N_e:** Số phần tử hữu hạn.
- **h, b:** Chiều cao và bề rộng tiết diện.
- **E_0:** Giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi.
- **COV_E:** Hệ số biến thiên của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi E.
- **d_x/L, d_y/L:** Các tỷ số chiều dài tương quan của mô hình 2D.
- **d_x/L, d_y/L, d_z/L:** Các tỷ số chiều dài tương quan của mô hình 3D.

C.3. Tệp dữ liệu đầu ra (Output Data)

Chương trình xuất tệp Excel gồm bốn trang tính:

- **"KetQua":** Kết quả COV của đáp ứng và trạng thái hội tụ.
- **"ThongSoDauVao":** Thông số đầu vào, đại lượng tất định tham chiếu và thiết lập hội tụ.
- **"HoiTuGauss":** Tổng hợp kết quả kiểm tra hội tụ theo số điểm Gauss.
- **"LichSuGauss":** Chi tiết quá trình kiểm tra qua từng mức tăng số điểm Gauss.

C.4. Bản in câu lệnh chương trình (Source Code)

a. Chương trình phân tích ổn định cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

```
function SFEM_GUI_ON_DINH_2D
clc; close all;
hFig=figure('Name','On dinh 2D - Hoi tu Gauss tung cap','NumberTitle','off',
...
    'Position',[80 50 1180 720],'Color',[.94 .94 .94],'MenuBar','none','Resiz
    e','on');
hPanel=uipanel('Parent',hFig,'Title','THONG SO DAU VAO','FontSize',10, ...
```

```
    'FontWeight','bold','Position',[.01 .02 .22 .96]);
lab={'Chieu dai cot L (m):','So phan tu Ne:','Chieu cao h (m):', ...
    'Be rong b (m):','Modun E0 (Pa):','COV_E (sigma_f):'};
val={'8','40','0.25','0.25','30e9','0.05'};
tag={'in_L','in_Ne','in_h','in_b','in_E0','in_sigma_f'};
for k=1:6, add_param(hPanel,k,lab{k},val{k},tag{k}); end
add_vector(hPanel,'Ty le dx/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 2 6 40 100]','in_d
x',.38);
add_vector(hPanel,'Ty le dy/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 2 6 40 100]','in_d
y',.275);
hBtnRun=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','TINH TOAN','
Units','normalized', ...
    'Position',[.05 .105 .90 .075],'FontSize',11,'FontWeight','bold','Backgro
    undColor',[0 .4 .8], ...
    'ForegroundColor','white','Callback',@run_calculation);
hBtnExcel=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','XUAT EXCEL
','Units','normalized', ...
    'Position',[.05 .02 .90 .075],'FontSize',11,'FontWeight','bold','Backgrou
    ndColor',[.2 .6 .2], ...
    'ForegroundColor','white','Enable','off','Callback',@export_excel_callbac
    k);
hAx1=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.28 .58 .31 .35],'Bo
x','on');
hAx2=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.65 .58 .31 .35],'Bo
x','on');
hAx3=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.28 .10 .31 .35],'Bo
x','on');
hAx4=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.65 .10 .31 .35],'Bo
x','on');
    function add_param(parent,idx,lbl,v,tag0)
        y=.93-(idx-1)*.085;
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y .9 .028],'HorizontalAlignment','left');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed', ...
            'Position',[.05 y-.045 .9 .04],'Tag',tag0,'BackgroundColor','whit
            e');
    end
    function add_vector(parent,lbl,v,tag0,y)
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized', ...
            'Position',[.05 y .9 .028],'HorizontalAlignment','left','FontWeig
            ht','bold');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed', ...
            'Position',[.05 y-.065 .9 .058],'Max',2,'Tag',tag0,'BackgroundCol
            or','white');
    end
    function x=read_scalar(tag0)
        x=str2double(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'String'));
    end
    function x=read_vector(tag0)
        x=str2num(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'String'));
    end
    function run_calculation(hObject,~)
        set(hFig,'Pointer','watch'); set(hObject,'String','Dang tinh...','Ena
        ble','off');
        set(hBtnExcel,'Enable','off'); drawnow;
        try
            L=read_scalar('in_L'); Ne=read_scalar('in_Ne'); h=read_scalar('in
            _h');
```

```
b=read_scalar('in_b'); E0=read_scalar('in_E0'); sigma_f=read_scal
ar('in_sigma_f');
dx_L_input=read_vector('in_dx'); dy_L_input=read_vector('in_dy');
z=[L Ne h b E0 sigma_f];
if ~isreal(z)||any(isnan(z))||any(isinf(z)), error('Du lieu dau v
ao phai la cac so huu han.'); end
if L<=0||h<=0||b<=0||E0<=0, error('L, h, b va E0 phai lon hon 0.'
); end
if sigma_f<0, error('sigma_f = COV_E phai khong am.'); end
if Ne<2||abs(Ne-round(Ne))>0, error('So phan tu Ne phai la so ngu
yen >=2.'); end
Ne=round(Ne);
if isempty(dx_L_input)||isempty(dy_L_input), error('Phai nhap day
du dx/L va dy/L.'); end
if ~valid_ratio(dx_L_input)||~valid_ratio(dy_L_input), error('dx/
L va dy/L phai la cac so thuc duong huu han.'); end
dx_L_input=dx_L_input(:).'; dy_L_input=dy_L_input(:).';
if numel(dx_L_input)==numel(dy_L_input), dx_L_cases=dx_L_input; d
y_L_cases=dy_L_input;
elseif numel(dx_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input*ones(size(dy_L
_input)); dy_L_cases=dy_L_input;
elseif numel(dy_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input; dy_L_cases=dy
_L_input*ones(size(dx_L_input));
else, error('Hai vector dx/L va dy/L phai cung do dai, hoac mot t
rong hai la so don.'); end
nCase=numel(dx_L_cases); dx=dx_L_cases*L; dy=dy_L_cases*L;
Le=L/Ne; I=b*h^3/12; Ndof=2*(Ne+1); Nw=3;
K0_e=E0*I*[12/Le^3 6/Le^2 -12/Le^3 6/Le^2;6/Le^2 4/Le -6/Le^2 2/L
e; ...
    -12/Le^3 -6/Le^2 12/Le^3 -6/Le^2;6/Le^2 2/Le -6/Le^2 4/Le];
K_P_e=[6/(5*Le) 1/10 -6/(5*Le) 1/10;1/10 2*Le/15 -1/10 -Le/30; ..
.
    -6/(5*Le) -1/10 6/(5*Le) -1/10;1/10 -Le/30 -1/10 2*Le/15];
K0=zeros(Ndof); K_P=zeros(Ndof);
for e=1:Ne
    id=(2*e-1):(2*e+2);
    K0(id,id)=K0(id,id)+K0_e; K_P(id,id)=K_P(id,id)+K_P_e;
end
dof_free{1}=3:Ndof;
dof_free{2}=[2:Ndof-2 Ndof];
dof_free{3}=3:Ndof-2;
dof_free{4}=[3:Ndof-2 Ndof];
lambda0=zeros(1,4); psi0=zeros(Ndof,4);
for r=1:4
    [lambda0(r),psi0(:,r)]=solve_buckling(K0(dof_free{r},dof_free
    {r}),K_P(dof_free{r},dof_free{r}),Ndof,dof_free{r});
end
coef_DeltaK=E0*b/Le^6; DeltaK_i_e=zeros(4,4,Nw);
DeltaK_i_e(:,:,1)=coef_DeltaK*[36*Le^2 24*Le^3 -36*Le^2 12*Le^3;
...
    24*Le^3 16*Le^4 -24*Le^3 8*Le^4;-36*Le^2 -24*Le^3 36*Le^2 -12
    *Le^3; ...
    12*Le^3 8*Le^4 -12*Le^3 4*Le^4];
DeltaK_i_e(:,:,2)=coef_DeltaK*[-144*Le -84*Le^2 144*Le -60*Le^2;
...
    -84*Le^2 -48*Le^3 84*Le^2 -36*Le^3;144*Le 84*Le^2 -144*Le 60*
    Le^2; ...
    -60*Le^2 -36*Le^3 60*Le^2 -24*Le^3];
DeltaK_i_e(:,:,3)=coef_DeltaK*[144 72*Le -144 72*Le;72*Le 36*Le^2
-72*Le 36*Le^2; ...
    -144 -72*Le 144 -72*Le;72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^2];
lambda_Theta_I=zeros(4,Ne,Nw);
```

```
for r=1:4
    for e=1:Ne
        id=(2*e-1):(2*e+2); psi0_e=psi0(id,r);
        for i=1:Nw, lambda_Theta_I(r,e,i)=real(psi0_e'*DeltaK_i_e
        (:,:,i)*psi0_e); end
    end
end
tol_Gauss=1e-6; tol_COV_rel=1e-6; tol_COV_abs=1e-12;
NG_list=[20 30 40 60 80 100 140 180]; required_passes=2;
xi_rules=cell(size(NG_list)); w_rules=xi_rules;
for ig=1:numel(NG_list)
    [xi_rules{ig},w_rules{ig}]=gauss_legendre_rule(NG_list(ig));
end
COV_lambda=NaN(4,nCase); NG_used=zeros(1,nCase);
converged=false(1,nCase);
gauss_summary=NaN(nCase,28); gauss_history=zeros(0,27);
for ic=1:nCase
    set(hObject,'String',sprintf('Dang tinh %d/%d...',ic,nCase));
    drawnow;
    [COV_now,info,history]=gauss_convergence_buckling( ...
        Le,h,dx(ic),dy(ic),Ne,sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I, ...
        NG_list,xi_rules,w_rules,tol_Gauss, ...
        tol_COV_rel,tol_COV_abs,required_passes);
    COV_lambda(:,ic)=COV_now(:);
    NG_used(ic)=info.NG; converged(ic)=info.converged;
    case_info=[ic dx_L_cases(ic) dy_L_cases(ic) dx(ic) dy(ic)];
    gauss_summary(ic,:)=[case_info history(end,:) info.converged]
    ;
    gauss_history=[gauss_history; ...
        repmat(case_info,size(history,1),1) history];
end
eq=max(abs(dx_L_cases-dy_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L_c
ases dy_L_cases])));
vx=max(dx_L_cases)-min(dx_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dx_L_cas
es)));
vy=max(dy_L_cases)-min(dy_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dy_L_cas
es)));
if eq, xp=dx_L_cases; xl='d_x/L = d_y/L'; useLog=true;
elseif vx&&~vy, xp=dx_L_cases; xl='d_x/L'; useLog=true;
elseif ~vx&&vy, xp=dy_L_cases; xl='d_y/L'; useLog=true;
else, xp=1:nCase; xl='Chi so truong hop'; useLog=false; end
draw_curve(hAx1,xp,COV_lambda(1,:),'b-s','b','C-F (Ngam - Tu do)'
,xl,useLog);
draw_curve(hAx2,xp,COV_lambda(2,:),'r-s','r','H-H (Khop - Khop)',
xl,useLog);
draw_curve(hAx3,xp,COV_lambda(3,:),'g-^','g','C-C (Ngam - Ngam)',
xl,useLog);
draw_curve(hAx4,xp,COV_lambda(4,:),'m-d','m','C-H (Ngam - Khop)',
xl,useLog);
R.dx_L_cases=dx_L_cases; R.dy_L_cases=dy_L_cases; R.dx=dx; R.dy=d
y; R.COV_lambda=COV_lambda; R.lambda0=lambda0;
R.L=L; R.Ne=Ne; R.h=h; R.b=b; R.E0=E0; R.sigma_f=sigma_f;
R.NG_used=NG_used; R.converged=converged;
R.NG_list=NG_list; R.tol_Gauss=tol_Gauss;
R.tol_COV_rel=tol_COV_rel; R.tol_COV_abs=tol_COV_abs;
R.required_passes=required_passes;
R.gauss_summary=gauss_summary; R.gauss_history=gauss_history;
guidata(hFig,R); set(hBtnExcel,'Enable','on'); set(hObject,'Strin
g','TINH TOAN','Enable','on');
msg=sprintf('Da kiem tra %d cap dx,dy. Dat: %d; chua dat: %d.', .
..
    nCase,sum(converged),sum(~converged));
```

```
        if any(converged)
            msg=sprintf('%s\nSo diem Gauss cua cac cap dat: %d den %d.',
            ...
                msg,min(NG_used(converged)),max(NG_used(converged)));
        end
        if any(~converged)
            msg=sprintf('%s\nCap chua dat khong duoc dua vao duong COV.',
            msg);
        end
        msg=sprintf('%s\nXem HoiTuGauss va LichSuGauss trong Excel.',msg)
        ;
        msgbox(msg,'Thong bao');
    catch err
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on'); errordlg(err.mes
        sage,'Loi Chuong Trinh');
    end
    set(hFig,'Pointer','arrow');
end
function tf=valid_ratio(x)
    tf=isreal(x)&&~any(isnan(x(:)))&&~any(isinf(x(:)))&&~any(x(:)<=0);
end
function draw_curve(ax,x,y,sty,fc,ttl,xl,useLog)
    axes(ax); cla;
    if useLog, semilogx(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor',fc,'
    MarkerSize',5);
    else, plot(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor',fc,'MarkerSiz
    e',5); end
    grid(ax,'on'); set(ax,'XMinorGrid','on','YMinorGrid','on');
    title(ax,ttl); ylabel(ax,'COV(\lambda^1)'); xlabel(ax,xl);
end
function export_excel_callback(~,~)
    R=guidata(hFig);
    if isempty(R)||~isstruct(R)||~isfield(R,'COV_lambda'), errordlg('Khon
    g co du lieu!','Loi'); return; end
    [file,path]=uiputfile('*.xlsx','Luu ket qua On Dinh 2D'); if isequal(
    file,0), return; end
    fn=fullfile(path,file);
    try
        H1={'dx_L','dy_L','dx_m','dy_m','COV_lambda_CF', ...
            'COV_lambda_HH','COV_lambda_CC','COV_lambda_CH', ...
            'GaussOrder','Converged'};
        S1=[H1;num2cell([R.dx_L_cases(:) R.dy_L_cases(:) ...
            R.dx(:) R.dy(:) R.COV_lambda' ...
            R.NG_used(:) double(R.converged(:))])];
        N={'L';'Ne';'h';'b';'E0';'sigma_f';'lambda0_CF_N'; ...
            'lambda0_HH_N';'lambda0_CC_N';'lambda0_CH_N'; ...
            'tol_Gauss';'tol_COV_rel';'tol_COV_abs'; ...
            'required_passes';'NG_list';'Nw'};
        V=[num2cell([R.L;R.Ne;R.h;R.b;R.E0;R.sigma_f; ...
            R.lambda0(:);R.tol_Gauss;R.tol_COV_rel; ...
            R.tol_COV_abs;R.required_passes]);{mat2str(R.NG_list);3}];
        H3={'Case','dx_L','dy_L','dx_m','dy_m','GaussOrder', ...
            'COV_CF_last','COV_HH_last','COV_CC_last','COV_CH_last', ...
            'Rel_Ix','Rel_Iy','Rel_CovTheta', ...
            'Rel_COV_CF','Abs_COV_CF','Rel_COV_HH','Abs_COV_HH', ...
            'Rel_COV_CC','Abs_COV_CC','Rel_COV_CH','Abs_COV_CH', ...
            'PassIntegral','PassCOV_CF','PassCOV_HH', ...
            'PassCOV_CC','PassCOV_CH','PassStreak','Converged'};
        H4=H3(1:end-1);
        sheets={'KetQua','ThongSoDauVao','HoiTuGauss','LichSuGauss'};
        data={S1,[{'ThongSo','GiaTri'};N V], ...
            [H3;num2cell(R.gauss_summary)], ...
```

```
                [H4;num2cell(R.gauss_history)]};
            for isheet=1:numel(sheets)
                [status,message]=xlswrite(fn,data{isheet},sheets{isheet});
                if ~status, error('Khong ghi duoc sheet %s: %s', ...
                        sheets{isheet},message.message); end
            end
            msgbox(['Da luu file: ' fn],'Thong bao');
        catch err
            errordlg(['Loi xuat file: ' err.message],'Loi');
        end
    end
    function [lambda0_1,psi0_full]=solve_buckling(K0_ff,K_P_ff,Ndof,dof_free)
        K0_ff=.5*(K0_ff+K0_ff'); K_P_ff=.5*(K_P_ff+K_P_ff'); [V,D]=eig(K0_ff,
        K_P_ff);
        lambda_all=real(diag(D)); good=find(~isnan(lambda_all)&~isinf(lambda_
        all)&lambda_all>0);
        if isempty(good), error('Khong tim thay tai trong toi han duong.'); e
        nd
        [~,j]=min(lambda_all(good)); k=good(j); v=real(V(:,k));
        a2=real(v'*K_P_ff*v);
        if isnan(a2)||isinf(a2)||a2<=0, error('Loi chuan hoa vector buckling.
        '); end
        v=v/sqrt(a2); lambda0_1=real(v'*K0_ff*v); psi0_full=zeros(Ndof,1); ps
        i0_full(dof_free)=v;
    end
end
function [x,w]=gauss_legendre_rule(n)
k=1:n-1; beta=k./sqrt(4*k.^2-1); T=diag(beta,1)+diag(beta,-1);
[V,D]=eig(T); [x,ind]=sort(diag(D)); V=V(:,ind); w=2*(V(1,:).^2)';
end
function I=expabs_moment_split(p,q,a1,b1,a2,b2,ell,shift,g,w)
x1=.5*(b1-a1)*g+.5*(a1+b1); w1=.5*(b1-a1)*w; I=0;
for i=1:length(g)
    sp=x1(i)-shift;
    if sp>a2&&sp<b2
        s=expabs_inner(q,x1(i),a2,sp,ell,shift,g,w)+expabs_inner(q,x1(i),sp,b
        2,ell,shift,g,w);
    else, s=expabs_inner(q,x1(i),a2,b2,ell,shift,g,w); end
    I=I+w1(i)*x1(i)^p*s;
end
end
function I=expabs_inner(q,x1,a,b,ell,shift,g,w)
if b<=a, I=0; return; end
x=.5*(b-a)*g+.5*(a+b); wg=.5*(b-a)*w;
I=sum(wg.*x.^q.*exp(-abs(x-x1+shift)/ell));
end
function [COV_lambda,info,history]=gauss_convergence_buckling( ...
    Le,h,dx,dy,Ne,sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I,NG_list, ...
    xi_rules,w_rules,tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,required_passes)
COV_lambda=NaN(1,4); info.converged=false; info.NG=NG_list(end);
history=NaN(numel(NG_list),22); pass_streak=0;
for ig=1:numel(NG_list)
    [COV_now,Q]=buckling_response_gauss(Le,h,dx,dy,Ne, ...
        sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I,xi_rules{ig},w_rules{ig});
    rel_int=NaN(1,3); rel_COV=NaN(1,4); abs_COV=rel_COV;
    pass_int=false; pass_COV=false(1,4);
    if ig>1
        [rel_int(1),unused]=relative_difference(Q_old.I_x,Q.I_x);
        [rel_int(2),unused]=relative_difference(Q_old.I_y,Q.I_y);
        [rel_int(3),unused]=relative_difference(Q_old.Theta,Q.Theta);
        for bc=1:4
            [rel_COV(bc),abs_COV(bc)]= ...
```

```
                relative_difference(COV_old(bc),COV_now(bc));
        end
        pass_int=all(rel_int<=tol_Gauss);
        pass_COV=abs_COV<=tol_COV_abs+tol_COV_rel*abs(COV_now);
        if pass_int&&all(pass_COV), pass_streak=pass_streak+1;
        else, pass_streak=0; end
    end
    history(ig,:)=[NG_list(ig) COV_now rel_int ...
        rel_COV(1) abs_COV(1) rel_COV(2) abs_COV(2) ...
        rel_COV(3) abs_COV(3) rel_COV(4) abs_COV(4) ...
        pass_int pass_COV pass_streak];
    if pass_streak>=required_passes
        COV_lambda=COV_now; info.converged=true; info.NG=NG_list(ig);
        history=history(1:ig,:); return;
    end
    Q_old=Q; COV_old=COV_now;
end
end
function [COV_lambda,Q]=buckling_response_gauss(Le,h,dx,dy,Ne, ...
    sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I,xi_G,w_G)
Nw=3; lag_e=-(Ne-1):(Ne-1); Nlag=numel(lag_e);
I_y22=expabs_moment_split(2,2,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
Q.I_y=I_y22; Q.I_x=zeros(Nw,Nw,Nlag);
if ~isfinite(I_y22)||I_y22<=0
    error('Tich phan theo y khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
for ir=1:Nlag
    Delta_x=Le*lag_e(ir);
    for i1=1:Nw
        for i2=1:Nw
            Q.I_x(i1,i2,ir)=expabs_moment_split(i1-1,i2-1, ...
                0,Le,0,Le,dx,Delta_x,xi_G,w_G);
        end
    end
end
if any(~isfinite(Q.I_x(:)))||Q.I_x(1,1,Ne)<=0
    error('Tich phan theo x khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
Q.Theta=I_y22.*Q.I_x;
Cov_Theta_lag=sigma_f^2.*Q.Theta; COV_lambda=zeros(1,4);
for bc=1:4
    Var_lambda=0;
    for i1=1:Nw
        a1=reshape(lambda_Theta_I(bc,:,i1),Ne,1);
        for i2=1:Nw
            a2=reshape(lambda_Theta_I(bc,:,i2),Ne,1);
            Cov_Theta=zeros(Ne);
            for e1=1:Ne
                for e2=1:Ne
                    Cov_Theta(e1,e2)=Cov_Theta_lag(i1,i2,(e2-e1)+Ne);
                end
            end
            Var_lambda=Var_lambda+a1'*Cov_Theta*a2;
        end
    end
    scale_Var_lambda=max(lambda0(bc)^2,eps);
    if Var_lambda<0&&abs(Var_lambda)<=1e-10*scale_Var_lambda
        Var_lambda=0;
    end
    if ~isfinite(Var_lambda)||Var_lambda<0
        error('Phuong sai lambda cua dieu kien bien %d khong hop le: %.6e.',
        ...
```

```
            bc,Var_lambda);
    end
    COV_lambda(bc)=sqrt(Var_lambda)/lambda0(bc);
end
if any(~isfinite(COV_lambda)), error('COV luc toi han khong huu han.'); end
end
function [rel_err,abs_err]=relative_difference(A,B)
abs_err=max(abs(A(:)-B(:))); scale=max(abs(B(:)));
if scale>0, rel_err=abs_err/scale;
elseif abs_err==0, rel_err=0;
else, rel_err=Inf; end
end
```

b. Chương trình phân tích ổn định cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

```
function SFEM_GUI_ON_DINH_3D
clc; close all;
hFig=figure('Name','On dinh 3D - Hoi tu Gauss tung bo','NumberTitle','off','P
osition',[80 45 1200 730],'Color',[.94 .94 .94],'MenuBar','none','Resize','on
');
hPanel=uipanel('Parent',hFig,'Title','THONG SO DAU VAO','FontSize',10,'FontWe
ight','bold','Position',[.01 .02 .22 .96]);
lab={'Chieu dai cot L (m):','Be rong b (m):','Chieu cao h (m):','Modun E0 (Pa
):','COV_E (sigma_f):','So phan tu Ne:','So bien trong so Nw:'};
val={'8','0.25','0.25','30e9','0.05','40','3'};
tag={'in_L','in_b','in_h','in_E0','in_sigma_f','in_Ne','in_Nw'};
for k=1:7, add_param(hPanel,k,lab{k},val{k},tag{k}); end
add_vector(hPanel,'Ty le dx/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 2 6 40 100]','in_d
x',.47);
add_vector(hPanel,'Ty le dy/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 2 6 40 100]','in_d
y',.35);
add_vector(hPanel,'Ty le dz/L:','[0.01 0.03 0.08 0.2 0.4 1 2 6 40 100]','in_d
z',.23);
hBtnRun=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','TINH TOAN','
Units','normalized','Position',[.05 .105 .90 .07],'FontSize',11,'FontWeight',
'bold','BackgroundColor',[0 .4 .8],'ForegroundColor','white','Callback',@run_
calculation);
hBtnExcel=uicontrol('Parent',hPanel,'Style','pushbutton','String','XUAT EXCEL
','Units','normalized','Position',[.05 .02 .90 .07],'FontSize',11,'FontWeight
','bold','BackgroundColor',[.2 .6 .2],'ForegroundColor','white','Enable','off
','Callback',@export_excel_callback);
hAx1=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.28 .58 .31 .35],'Bo
x','on');
hAx2=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.65 .58 .31 .35],'Bo
x','on');
hAx3=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.28 .10 .31 .35],'Bo
x','on');
hAx4=axes('Parent',hFig,'Units','normalized','Position',[.65 .10 .31 .35],'Bo
x','on');
    function add_param(parent,idx,lbl,v,tag0)
        y=.95-(idx-1)*.065;
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized','Position',[.05 y .9 .024],'HorizontalAlignment','left');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed','Position',[.05 y-.033 .9 .032],'Tag',tag0,'BackgroundColor','whi
        te');
    end
    function add_vector(parent,lbl,v,tag0,y)
        uicontrol('Parent',parent,'Style','text','String',lbl,'Units','normal
        ized','Position',[.05 y .9 .026],'HorizontalAlignment','left','FontWe
        ight','bold');
        uicontrol('Parent',parent,'Style','edit','String',v,'Units','normaliz
        ed','Position',[.05 y-.06 .9 .055],'Max',2,'Tag',tag0,'BackgroundColo
        r','white');
```

```
end
function x=read_scalar(tag0)
    x=str2double(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'String'));
end
function x=read_vector(tag0)
    x=str2num(get(findobj(hFig,'Tag',tag0),'String'));
end
function run_calculation(hObject,~)
    set(hFig,'Pointer','watch'); set(hObject,'String','Dang tinh...','Ena
    ble','off'); set(hBtnExcel,'Enable','off'); drawnow;
    try
        L=read_scalar('in_L'); b=read_scalar('in_b'); h=read_scalar('in_h
        '); E0=read_scalar('in_E0');
        sigma_f=read_scalar('in_sigma_f'); Ne=read_scalar('in_Ne'); Nw=re
        ad_scalar('in_Nw');
        dx_L_input=read_vector('in_dx'); dy_L_input=read_vector('in_dy');
        dz_L_input=read_vector('in_dz');
        z=[L b h E0 sigma_f Ne Nw];
        if ~isreal(z)||any(isnan(z))||any(isinf(z)), error('Du lieu dau v
        ao phai la cac so huu han.'); end
        if L<=0||b<=0||h<=0||E0<=0, error('L, b, h va E0 phai lon hon 0.'
        ); end
        if sigma_f<0, error('sigma_f = COV_E phai khong am.'); end
        if Ne<2||abs(Ne-round(Ne))>0, error('So phan tu Ne phai la so ngu
        yen >=2.'); end
        Ne=round(Ne);
        if Nw~=3, error('Mo hinh hien tai yeu cau Nw = 3.'); end
        if isempty(dx_L_input)||isempty(dy_L_input)||isempty(dz_L_input),
        error('Phai nhap day du dx/L, dy/L va dz/L.'); end
        if ~valid_ratio(dx_L_input)||~valid_ratio(dy_L_input)||~valid_rat
        io(dz_L_input), error('Cac ty le tuong quan phai la so thuc duong
        huu han.'); end
        dx_L_input=dx_L_input(:).'; dy_L_input=dy_L_input(:).'; dz_L_inpu
        t=dz_L_input(:).'; nCase=max([numel(dx_L_input) numel(dy_L_input)
        numel(dz_L_input)]);
        if ~oklen(dx_L_input,nCase)||~oklen(dy_L_input,nCase)||~oklen(dz_
        L_input,nCase), error('Moi dau vao dx/L, dy/L, dz/L phai la so do
        n hoac vector cung do dai.'); end
        if numel(dx_L_input)==1, dx_L_cases=dx_L_input*ones(1,nCase); els
        e, dx_L_cases=dx_L_input; end
        if numel(dy_L_input)==1, dy_L_cases=dy_L_input*ones(1,nCase); els
        e, dy_L_cases=dy_L_input; end
        if numel(dz_L_input)==1, dz_L_cases=dz_L_input*ones(1,nCase); els
        e, dz_L_cases=dz_L_input; end
        dx=dx_L_cases*L; dy=dy_L_cases*L; dz=dz_L_cases*L;
        Le=L/Ne; I=b*h^3/12; Ndof=2*(Ne+1);
        K0_e=E0*I*[12/Le^3 6/Le^2 -12/Le^3 6/Le^2;6/Le^2 4/Le -6/Le^2 2/L
        e;-12/Le^3 -6/Le^2 12/Le^3 -6/Le^2;6/Le^2 2/Le -6/Le^2 4/Le];
        K_P_e=[6/(5*Le) 1/10 -6/(5*Le) 1/10;1/10 2*Le/15 -1/10 -Le/30;-6/
        (5*Le) -1/10 6/(5*Le) -1/10;1/10 -Le/30 -1/10 2*Le/15];
        K0=zeros(Ndof); K_P=zeros(Ndof);
        for e=1:Ne, id=(2*e-1):(2*e+2); K0(id,id)=K0(id,id)+K0_e; K_P(id,
        id)=K_P(id,id)+K_P_e; end
        dof_free{1}=3:Ndof; dof_free{2}=[2:Ndof-2 Ndof]; dof_free{3}=3:Nd
        of-2; dof_free{4}=[3:Ndof-2 Ndof];
        lambda0=zeros(1,4); psi0=zeros(Ndof,4);
        for r=1:4, [lambda0(r),psi0(:,r)]=solve_buckling(K0(dof_free{r},d
        of_free{r}),K_P(dof_free{r},dof_free{r}),Ndof,dof_free{r}); end
        coef_DeltaK=E0/Le^6; DeltaK_i_e=zeros(4,4,Nw);
        DeltaK_i_e(:,:,1)=coef_DeltaK*[36*Le^2 24*Le^3 -36*Le^2 12*Le^3;2
        4*Le^3 16*Le^4 -24*Le^3 8*Le^4;-36*Le^2 -24*Le^3 36*Le^2 -12*Le^3
        ;12*Le^3 8*Le^4 -12*Le^3 4*Le^4];
```

```
DeltaK_i_e(:,:,2)=coef_DeltaK*[-144*Le -84*Le^2 144*Le -60*Le^2;-
84*Le^2 -48*Le^3 84*Le^2 -36*Le^3;144*Le 84*Le^2 -144*Le 60*Le^2;
-60*Le^2 -36*Le^3 60*Le^2 -24*Le^3];
DeltaK_i_e(:,:,3)=coef_DeltaK*[144 72*Le -144 72*Le;72*Le 36*Le^2
-72*Le 36*Le^2;-144 -72*Le 144 -72*Le;72*Le 36*Le^2 -72*Le 36*Le^
2];
lambda_Theta_I=zeros(4,Ne,Nw);
for r=1:4
    for e=1:Ne
        id=(2*e-1):(2*e+2); psi0_e=psi0(id,r);
        for i=1:Nw, lambda_Theta_I(r,e,i)=real(psi0_e'*DeltaK_i_e
        (:,:,i)*psi0_e); end
    end
end
tol_Gauss=1e-6; tol_COV_rel=1e-6; tol_COV_abs=1e-12;
NG_list=[20 30 40 60 80 100 140 180]; required_passes=2;
xi_rules=cell(size(NG_list)); w_rules=xi_rules;
for ig=1:numel(NG_list)
    [xi_rules{ig},w_rules{ig}]=gauss_legendre_rule(NG_list(ig));
end
COV_lambda=NaN(4,nCase); NG_used=zeros(1,nCase);
converged=false(1,nCase);
gauss_summary=NaN(nCase,31); gauss_history=zeros(0,30);
for ic=1:nCase
    set(hObject,'String',sprintf('Dang tinh %d/%d...',ic,nCase));
    drawnow;
    [COV_now,info,history]=gauss_convergence_buckling3d( ...
        Le,h,b,dx(ic),dy(ic),dz(ic),Ne,sigma_f, ...
        lambda0,lambda_Theta_I, ...
        NG_list,xi_rules,w_rules,tol_Gauss, ...
        tol_COV_rel,tol_COV_abs,required_passes);
    COV_lambda(:,ic)=COV_now(:);
    NG_used(ic)=info.NG; converged(ic)=info.converged;
    case_info=[ic dx_L_cases(ic) dy_L_cases(ic) dz_L_cases(ic) ..
    .
        dx(ic) dy(ic) dz(ic)];
    gauss_summary(ic,:)=[case_info history(end,:) info.converged]
    ;
    gauss_history=[gauss_history; ...
        repmat(case_info,size(history,1),1) history];
end
eqXY=max(abs(dx_L_cases-dy_L_cases))<=100*eps*max(1,max(abs([dx_L
_cases dy_L_cases]))); eqXZ=max(abs(dx_L_cases-dz_L_cases))<=100*
eps*max(1,max(abs([dx_L_cases dz_L_cases])));
vx=max(dx_L_cases)-min(dx_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(dx_L_cas
es))); vy=max(dy_L_cases)-min(dy_L_cases)>100*eps*max(1,max(abs(d
y_L_cases))); vz=max(dz_L_cases)-min(dz_L_cases)>100*eps*max(1,ma
x(abs(dz_L_cases)));
if eqXY&&eqXZ, xp=dx_L_cases; xl='d_x/L = d_y/L = d_z/L'; useLog=
true;
elseif vx&&~vy&&~vz, xp=dx_L_cases; xl='d_x/L'; useLog=true;
elseif ~vx&&vy&&~vz, xp=dy_L_cases; xl='d_y/L'; useLog=true;
elseif ~vx&&~vy&&vz, xp=dz_L_cases; xl='d_z/L'; useLog=true;
else, xp=1:nCase; xl='Chi so truong hop'; useLog=false; end
draw_curve(hAx1,xp,COV_lambda(1,:),'b-s','b','C-F (Ngam - Tu do)'
,xl,useLog);
draw_curve(hAx2,xp,COV_lambda(2,:),'r-s','r','H-H (Khop - Khop)',
xl,useLog);
draw_curve(hAx3,xp,COV_lambda(3,:),'g-^','g','C-C (Ngam - Ngam)',
xl,useLog);
draw_curve(hAx4,xp,COV_lambda(4,:),'m-d','m','C-H (Ngam - Khop)',
xl,useLog);
```

```
        R.dx_L_cases=dx_L_cases; R.dy_L_cases=dy_L_cases; R.dz_L_cases=dz
        _L_cases; R.dx=dx; R.dy=dy; R.dz=dz; R.COV_lambda=COV_lambda; R.l
        ambda0=lambda0;
        R.L=L; R.Ne=Ne; R.h=h; R.b=b; R.E0=E0;
        R.sigma_f=sigma_f; R.Nw=Nw;
        R.NG_used=NG_used; R.converged=converged;
        R.NG_list=NG_list; R.tol_Gauss=tol_Gauss;
        R.tol_COV_rel=tol_COV_rel; R.tol_COV_abs=tol_COV_abs;
        R.required_passes=required_passes;
        R.gauss_summary=gauss_summary; R.gauss_history=gauss_history;
        guidata(hFig,R); set(hBtnExcel,'Enable','on'); set(hObject,'Strin
        g','TINH TOAN','Enable','on');
        msg=sprintf('Da kiem tra %d bo dx,dy,dz. Dat: %d; chua dat: %d.',
        ...
            nCase,sum(converged),sum(~converged));
        if any(converged)
            msg=sprintf('%s\nSo diem Gauss cua cac bo dat: %d den %d.', .
            ..
                msg,min(NG_used(converged)),max(NG_used(converged)));
        end
        if any(~converged)
            msg=sprintf('%s\nBo chua dat khong duoc dua vao duong COV.',m
            sg);
        end
        msg=sprintf('%s\nXem HoiTuGauss va LichSuGauss trong Excel.',msg)
        ;
        msgbox(msg,'Thong bao');
    catch err
        set(hObject,'String','TINH TOAN','Enable','on'); errordlg(err.mes
        sage,'Loi Chuong Trinh');
    end
    set(hFig,'Pointer','arrow');
end
function tf=valid_ratio(x)
    tf=isreal(x)&&~any(isnan(x(:)))&&~any(isinf(x(:)))&&~any(x(:)<=0);
end
function tf=oklen(x,n)
    tf=(numel(x)==1)||(numel(x)==n);
end
function draw_curve(ax,x,y,sty,fc,ttl,xl,useLog)
    axes(ax); cla;
    if useLog, semilogx(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor',fc,'
    MarkerSize',5);
    else, plot(ax,x,y,sty,'LineWidth',1.5,'MarkerFaceColor',fc,'MarkerSiz
    e',5); end
    grid(ax,'on'); set(ax,'XMinorGrid','on','YMinorGrid','on'); title(ax,
    ttl); ylabel(ax,'COV(\lambda^1)'); xlabel(ax,xl);
end
function export_excel_callback(~,~)
    R=guidata(hFig);
    if isempty(R)||~isstruct(R)||~isfield(R,'COV_lambda'), errordlg('Khon
    g co du lieu!','Loi'); return; end
    [file,path]=uiputfile('*.xlsx','Luu ket qua On Dinh 3D'); if isequal(
    file,0), return; end
    fn=fullfile(path,file);
    try
        H1={'dx_L','dy_L','dz_L','dx_m','dy_m','dz_m', ...
            'COV_lambda_CF', ...
            'COV_lambda_HH','COV_lambda_CC','COV_lambda_CH', ...
            'GaussOrder','Converged'};
        S1=[H1;num2cell([R.dx_L_cases(:) R.dy_L_cases(:) ...
            R.dz_L_cases(:) R.dx(:) R.dy(:) R.dz(:) R.COV_lambda' ...
```

```
                R.NG_used(:) double(R.converged(:))])];
            N={'L';'Ne';'h';'b';'E0';'sigma_f';'lambda0_CF_N'; ...
                'lambda0_HH_N';'lambda0_CC_N';'lambda0_CH_N'; ...
                'tol_Gauss';'tol_COV_rel';'tol_COV_abs'; ...
                'required_passes';'NG_list';'Nw'};
            V=[num2cell([R.L;R.Ne;R.h;R.b;R.E0;R.sigma_f; ...
                R.lambda0(:);R.tol_Gauss;R.tol_COV_rel; ...
                R.tol_COV_abs;R.required_passes]);{mat2str(R.NG_list);R.Nw}];
            H3={'Case','dx_L','dy_L','dz_L','dx_m','dy_m','dz_m', ...
                'GaussOrder', ...
                'COV_CF_last','COV_HH_last','COV_CC_last','COV_CH_last', ...
                'Rel_Ix','Rel_Iy','Rel_Iz','Rel_CovTheta', ...
                'Rel_COV_CF','Abs_COV_CF','Rel_COV_HH','Abs_COV_HH', ...
                'Rel_COV_CC','Abs_COV_CC','Rel_COV_CH','Abs_COV_CH', ...
                'PassIntegral','PassCOV_CF','PassCOV_HH', ...
                'PassCOV_CC','PassCOV_CH','PassStreak','Converged'};
            H4=H3(1:end-1);
            sheets={'KetQua','ThongSoDauVao','HoiTuGauss','LichSuGauss'};
            data={S1,[{'ThongSo','GiaTri'};N V], ...
                [H3;num2cell(R.gauss_summary)], ...
                [H4;num2cell(R.gauss_history)]};
            for isheet=1:numel(sheets)
                [status,message]=xlswrite(fn,data{isheet},sheets{isheet});
                if ~status, error('Khong ghi duoc sheet %s: %s', ...
                        sheets{isheet},message.message); end
            end
            msgbox(['Da luu file: ' fn],'Thong bao');
        catch err
            errordlg(['Loi xuat file: ' err.message],'Loi');
        end
    end
    function [lambda0_1,psi0_full]=solve_buckling(K0_ff,K_P_ff,Ndof,dof_free)
        K0_ff=.5*(K0_ff+K0_ff'); K_P_ff=.5*(K_P_ff+K_P_ff'); [V,D]=eig(K0_ff,
        K_P_ff); lambda_all=real(diag(D));
        good=find(~isnan(lambda_all)&~isinf(lambda_all)&lambda_all>0);
        if isempty(good), error('Khong tim thay tai trong toi han duong.'); e
        nd
        [~,j]=min(lambda_all(good)); k=good(j); v=real(V(:,k)); a2=real(v'*K_
        P_ff*v);
        if isnan(a2)||isinf(a2)||a2<=0, error('Loi chuan hoa vector buckling.
        '); end
        v=v/sqrt(a2); lambda0_1=real(v'*K0_ff*v); psi0_full=zeros(Ndof,1); ps
        i0_full(dof_free)=v;
    end
end
function [x,w]=gauss_legendre_rule(n)
k=1:n-1; beta=k./sqrt(4*k.^2-1); T=diag(beta,1)+diag(beta,-1); [V,D]=eig(T);
[x,ind]=sort(diag(D)); V=V(:,ind); w=2*(V(1,:).^2)';
end
function I=expabs_moment_split(p,q,a1,b1,a2,b2,ell,shift,g,w)
x1=.5*(b1-a1)*g+.5*(a1+b1); w1=.5*(b1-a1)*w; I=0;
for i=1:length(g)
    sp=x1(i)-shift;
    if sp>a2&&sp<b2, s=expabs_inner(q,x1(i),a2,sp,ell,shift,g,w)+expabs_inner
    (q,x1(i),sp,b2,ell,shift,g,w);
    else, s=expabs_inner(q,x1(i),a2,b2,ell,shift,g,w); end
    I=I+w1(i)*x1(i)^p*s;
end
end
function I=expabs_inner(q,x1,a,b,ell,shift,g,w)
if b<=a, I=0; return; end
x=.5*(b-a)*g+.5*(a+b); wg=.5*(b-a)*w; I=sum(wg.*x.^q.*exp(-abs(x-x1+shift)/el
```

```
l));
end
function [COV_lambda,info,history]=gauss_convergence_buckling3d( ...
    Le,h,b,dx,dy,dz,Ne,sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I,NG_list, ...
    xi_rules,w_rules,tol_Gauss,tol_COV_rel,tol_COV_abs,required_passes)
COV_lambda=NaN(1,4); info.converged=false; info.NG=NG_list(end);
history=NaN(numel(NG_list),23); pass_streak=0;
for ig=1:numel(NG_list)
    [COV_now,Q]=buckling_response_gauss3d(Le,h,b,dx,dy,dz,Ne, ...
        sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I,xi_rules{ig},w_rules{ig});
    rel_int=NaN(1,4); rel_COV=NaN(1,4); abs_COV=rel_COV;
    pass_int=false; pass_COV=false(1,4);
    if ig>1
        [rel_int(1),unused]=relative_difference(Q_old.I_x,Q.I_x);
        [rel_int(2),unused]=relative_difference(Q_old.I_y,Q.I_y);
        [rel_int(3),unused]=relative_difference(Q_old.I_z,Q.I_z);
        [rel_int(4),unused]=relative_difference(Q_old.Theta,Q.Theta);
        for bc=1:4
            [rel_COV(bc),abs_COV(bc)]= ...
                relative_difference(COV_old(bc),COV_now(bc));
        end
        pass_int=all(rel_int<=tol_Gauss);
        pass_COV=abs_COV<=tol_COV_abs+tol_COV_rel*abs(COV_now);
        if pass_int&&all(pass_COV), pass_streak=pass_streak+1;
        else, pass_streak=0; end
    end
    history(ig,:)=[NG_list(ig) COV_now rel_int ...
        rel_COV(1) abs_COV(1) rel_COV(2) abs_COV(2) ...
        rel_COV(3) abs_COV(3) rel_COV(4) abs_COV(4) ...
        pass_int pass_COV pass_streak];
    if pass_streak>=required_passes
        COV_lambda=COV_now; info.converged=true; info.NG=NG_list(ig);
        history=history(1:ig,:); return;
    end
    Q_old=Q; COV_old=COV_now;
end
end
function [COV_lambda,Q]=buckling_response_gauss3d(Le,h,b,dx,dy,dz,Ne, ...
    sigma_f,lambda0,lambda_Theta_I,xi_G,w_G)
Nw=3; lag_e=-(Ne-1):(Ne-1); Nlag=numel(lag_e);
I_y22=expabs_moment_split(2,2,-h/2,h/2,-h/2,h/2,dy,0,xi_G,w_G);
I_z00=expabs_moment_split(0,0,-b/2,b/2,-b/2,b/2,dz,0,xi_G,w_G);
Q.I_y=I_y22; Q.I_z=I_z00; Q.I_x=zeros(Nw,Nw,Nlag);
if ~isfinite(I_y22)||I_y22<=0
    error('Tich phan theo y khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
if ~isfinite(I_z00)||I_z00<=0
    error('Tich phan theo z khong hop le tai dz=%g.',dz);
end
for ir=1:Nlag
    Delta_x=Le*lag_e(ir);
    for i1=1:Nw
        for i2=1:Nw
            Q.I_x(i1,i2,ir)=expabs_moment_split(i1-1,i2-1, ...
                0,Le,0,Le,dx,Delta_x,xi_G,w_G);
        end
    end
end
if any(~isfinite(Q.I_x(:)))||Q.I_x(1,1,Ne)<=0
    error('Tich phan theo x khong hop le tai dx=%g, dy=%g.',dx,dy);
end
Q.Theta=(I_y22*I_z00).*Q.I_x;
```

```
Cov_Theta_lag=sigma_f^2.*Q.Theta; COV_lambda=zeros(1,4);
Cov_Theta=zeros(Ne*Nw);
for e1=1:Ne
    row_Theta=(e1-1)*Nw+(1:Nw);
    for e2=1:Ne
        col_Theta=(e2-1)*Nw+(1:Nw);
        Cov_Theta(row_Theta,col_Theta)=Cov_Theta_lag(:,:,(e2-e1)+Ne);
    end
end
Cov_Theta=.5*(Cov_Theta+Cov_Theta');
for bc=1:4
    lambda_Theta_e=squeeze(lambda_Theta_I(bc,:,:));
    lambda_Theta_vector=reshape(lambda_Theta_e.',[],1);
    Var_lambda=real(lambda_Theta_vector'*Cov_Theta*lambda_Theta_vector);
    scale_Var_lambda=max(lambda0(bc)^2,eps);
    if Var_lambda<0&&abs(Var_lambda)<=1e-10*scale_Var_lambda
        Var_lambda=0;
    end
    if ~isfinite(Var_lambda)||Var_lambda<0
        error('Phuong sai lambda cua dieu kien bien %d khong hop le: %.6e.',
        ...
            bc,Var_lambda);
    end
    COV_lambda(bc)=sqrt(Var_lambda)/lambda0(bc);
end
if any(~isfinite(COV_lambda)), error('COV luc toi han khong huu han.'); end
end
function [rel_err,abs_err]=relative_difference(A,B)
abs_err=max(abs(A(:)-B(:))); scale=max(abs(B(:)));
if scale>0, rel_err=abs_err/scale;
elseif abs_err==0, rel_err=0;
else, rel_err=Inf; end
end
```